

**UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA**

**Faculdade de Ciências e Tecnologia**

**Departamento de Engenharia Civil**

**Vibrações transversais em vigas finitas sujeitas a cargas móveis**

**Radiação de transição associada à mudança brusca  
da rigidez vertical de fundação**

Por

André Filipe da Silva Rodrigues

Dissertação apresentada na Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil, ramo de Estruturas

Orientador: Doutora Zuzana Dimitrovová

Júri: Doutor João Carlos Gomes Rocha de Almeida (Presidente)

Doutor Corneliu Cismasiu (Arguente)

**Monte da Caparica**

**2010**



## Agradecimentos

Em primeiro lugar quero agradecer à orientadora desta dissertação, a Doutora Zuzana Dimitrovová, por me ter guiado ao longo deste último ano e meio. O seu apoio e disponibilidade foram totais, e ao mesmo tempo que me deu oportunidade de trabalhar de forma autónoma e aprender com os meus erros, acompanhou de perto todo o processo e as suas sugestões e recomendações contribuíram em grande parte para a qualidade final da dissertação aqui apresentada.

Embora vários professores tenham contribuído para a minha formação académica ao longo dos anos que estudei na Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, devo um agradecimento especial ao Doutor Manuel Gonçalves da Silva e ao Professor José Nuno Varandas por renovarem e aumentarem o meu interesse pelo tema da modelação matemática.

Quero agradecer a toda a minha família, e em particular aos meus pais, não só por me terem proporcionado um ambiente adequado ao meu desenvolvimento como pessoa e como estudante, mas acima de tudo por sempre me terem incentivado a dar o meu melhor em tudo o que faço.

Agradeço à Joana Carvalho de forma especial, pois além do apoio e compreensão que se espera de uma companheira, contribuiu para a elaboração da dissertação com as suas sugestões e críticas e nunca me deixou duvidar das minhas capacidades.

Por fim, mas não menos importante, quero agradecer aos meus amigos, que além do apoio e camaradagem, proporcionaram ao longo do meu percurso académico momentos de descontração e diversão sem os quais seria muito mais penoso prosseguir o meu trabalho.



UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Faculdade de Ciências e Tecnologia

(Solicita-se ao Presidente do Júri a entrega ao Secretariado das Provas deste documento assinado para devolução ao Conselho Científico)

**PROVAS DE MESTRADO EM ENGENHARIA CIVIL - MIEC**

NOME André Filipe da Silva Rodrigues

DOCENTE DA FCT

☐

NÃO DOCENTE DA FCT

☒

**APTIDÃO PEDAGÓGICA E CAPACIDADE CIENTÍFICA**

☐

RELATÓRIO DA AULA

TRABALHO DE SÍNTESE

**MESTRADO DE** Engenharia Civil - MIEC

☒

**EQUIVALÊNCIA A MESTRADO DE**

☐

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO “ Vibrações transversais em vigas finitas sujeitas a cargas móveis – Radiação de transição associada à mudança brusca da rigidez vertical de fundação”

**DOUTORAMENTO**

☐

**EQUIVALÊNCIA DE DOUTORAMENTO**

☐

ÁREA DE

ESPECIALIDADE DE

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO

PROVAS COMPLEMENTARES

**AGREGAÇÃO EM**

☐

GRUPO DE DISCIPLINAS

LIÇÃO DE SÍNTESE

RELATÓRIO FINAL DA DISCIPLINA

**RESULTADO DAS PROVAS** 18 Valores

DATA 2010/ 04/ 15

Prof. Doutor João Rocha de Almeida

Nome do Presidente do Júri

João Rocha de Almeida  
Assinatura

Não escrever nesta zona, reservado ao Conselho Científico:



## Sumário

O aumento progressivo da velocidade e capacidade de carga dos veículos terrestres, especialmente os ferroviários, apresenta novos desafios na área da Engenharia Civil.

Um fenómeno que ganha especial importância para os actuais comboios de alta velocidade é o da radiação de transição, perturbações na deformada dinâmica da via que se manifestam sobre a forma de ondas adicionais quando o veículo passa por uma zona de mudança brusca da rigidez vertical da fundação.

A presente dissertação estuda de forma puramente analítica o caso concreto de uma viga bi-apoiada com mudança na rigidez de fundação a meio vão, sobre a qual actua uma carga móvel. É analisado o comportamento dinâmico da viga sem amortecimento para vários valores de velocidade sub-críticos, críticos e super-críticos para ambos os sentidos possíveis da carga móvel. Separa-se também o efeito da radiação de transição das restantes vibrações.

Faz-se ainda uma breve análise dos efeitos do amortecimento neste fenómeno, bem como considerações qualitativas sobre vibração vertical no veículo, que tem importância não só para a estabilidade deste, mas também para o conforto dos passageiros.

Conclui-se que o fenómeno é particularmente influenciado pela velocidade do veículo, e verifica-se que o amortecimento tem grande impacto no comportamento dinâmico da via.





## **Abstract**

The constant growth of land vehicle's speed and capacity, particularly railroad vehicles, presents new challenges in the field of Civil Engineering.

A phenomenon of great importance to today's high-speed trains is that of transition radiation, disturbances in the dynamic behavior of the track which manifest as extra waves generated by the passage of the vehicle through a region where vertical stiffness of the foundation changes abruptly.

This dissertation aims to study in a purely analytical way the particular case of a simply supported beam with a change in the foundation vertical stiffness that occurs at mid span, traversed by a moving load. The beam's dynamic behavior is studied, disregarding the effect of damping, employing several sub-critical, critical and super-critical velocities, assuming both possible orientations of the moving load. The transition radiation is separated from the remaining vibrations.

Furthermore, a brief analysis of the effect of damping is presented, as well as qualitative considerations about the vertical vibration in the vehicle, important both to its stability, but also to passenger's comfort.

In conclusion, this phenomenon is particularly affected by the vehicle's speed, and it is also verified that the effect of damping plays a big part in the dynamic behavior of the track.



## Simbologia

$a$	variável auxiliar na definição da coordenada generalizada
$a(x)$	variável auxiliar na definição da coordenada generalizada, em função do espaço
$b_i$	variável auxiliar na definição da coordenada generalizada para o $i$ -ésimo modo
$b_i(x)$	variável auxiliar na definição da coordenada generalizada para o $i$ -ésimo modo, em função do espaço
$c$	coeficiente de amortecimento distribuído da fundação visco-elástica, constante
$c_1$	coeficiente de amortecimento distribuído da fundação visco-elástica para o troço 1
$c_2$	coeficiente de amortecimento distribuído da fundação visco-elástica para o troço 2
$c(x)$	coeficiente de amortecimento distribuído da fundação visco-elástica, variável
$d_j$	$j$ -ésima raiz da equação característica
$f(t)$	componente temporal da solução da equação de movimento homogénea
$f_i(t)$	deslocamento generalizado do modo $i$
$i$	número do modo de vibração
$k$	coeficiente de rigidez distribuído da fundação visco-elástica, constante
$k(x)$	coeficiente de rigidez distribuído da fundação visco-elástica, variável
$k_1$	coeficiente de rigidez distribuído da fundação visco-elástica para o troço 1
$k_2$	coeficiente de rigidez distribuído da fundação visco-elástica para o troço 2
$k_{i,j}$	elemento da linha $i$ , coluna $j$ da matriz de rigidez
$l$	comprimento dos troços
$m$	massa distribuída da viga, constante
$m(x)$	massa distribuída da viga, variável
$m_1$	massa distribuída para o troço 1
$m_2$	massa distribuída para o troço 2
$n$	número de modos de vibração
$p(x,t)$	carregamento genérico, variável ao longo do espaço e do tempo
$s$	velocidade da carga móvel
$t$	coordenada temporal
$v(x)$	componente espacial da solução da equação de movimento homogénea
$v_i(x)$	$i$ -ésimo modo normal de vibração livre não amortecida
$x$	coordenada espacial
$y$	deformada vertical da viga
$y(x,t)$	deformada vertical da viga no ponto $x$ e instante $t$
$y^*(x,t)$	deformada vertical da viga com sentido inverso da coordenada $x$

$\{y(t)\}$  formulação vectorial da deformada da viga  
 $z$  variável auxiliar da transformada de Laplace

A constante de integração  
 $A_1$  constante de integração do troço 1  
 $A_2$  constante de integração do troço 2  
B constante de integração  
 $B_1$  constante de integração do troço 1  
 $B_2$  constante de integração do troço 2  
C constante de integração  
 $C_1$  constante de integração do troço 1  
 $C_2$  constante de integração do troço 2  
 $C_3$  constante de integração  
 $C_4$  constante de integração  
 $C_j$  constante de integração  
 $D_1$  constante de integração do troço 1  
 $D_2$  constante de integração do troço 2  
 $D$  operador diferencial  
E constante de integração  
E módulo de elasticidade da viga  
EI rigidez de flexão da viga, constante  
 $EI(x)$  rigidez de flexão da viga, variável  
 $EI_1$  rigidez de flexão da viga para o troço 1  
 $EI_2$  rigidez de flexão da viga para o troço 2  
F constante de integração  
 $F(x)$  deslocamento inicial da viga  
G constante de integração  
 $G(x)$  velocidade inicial da viga  
I inércia da viga  
 $[K]$  matriz de rigidez  
L comprimento total da viga  
 $L_1$  comprimento do primeiro troço da viga  
 $L_2$  comprimento do segundo troço da viga  
M momento flector  
 $[M]$  matriz de massa  
 $N_i$  norma do i-ésimo modo de vibração

$P$	intensidade da carga móvel pontual
$P(D)$	função polinomial do operador diferencial $D$
$Q_i(t)$	$i$ -ésima parcela do desenvolvimento em série da função de carga
$V$	esforço transversal
$\alpha$	variável auxiliar da separação de variáveis
$\beta$	constante da solução da equação de equilíbrio
$\delta$	translação
$\delta(x)$	função delta de Dirac
$\theta$	rotação
$\lambda$	constante da solução da equação de movimento
$\lambda_1$	constante da solução da equação de movimento para o trecho 1
$\lambda_2$	constante da solução da equação de movimento para o trecho 2
$\xi$	percentagem de amortecimento crítico
$\tau$	variável auxiliar de integração
$\varphi$	ângulo de fase
$\omega$	frequência cíclica
$\omega_i$	$i$ -ésima frequência natural de vibração livre não amortecida
$\omega_{bi}$	frequência cíclica do amortecimento para o $i$ -ésimo modo de vibração
$\{\Phi\}$	formulação vectorial do modo natural de vibração
$\{\Phi_i\}$	formulação vectorial do $i$ -ésimo modo natural de vibração



# Índice geral

<b>Índice de figuras .....</b>	<b>16</b>
<b>Índice de quadros .....</b>	<b>21</b>
<b>1. Introdução.....</b>	<b>25</b>
1.1 Sistemas oscilatórios discretos e contínuos.....	26
1.2 Sobreposição modal .....	27
1.3 Método analítico e método dos elementos finitos .....	28
<b>2. Vibrações transversais em vigas finitas.....</b>	<b>31</b>
2.1 Equação de movimento .....	31
2.2 Vibrações livres não amortecidas.....	33
2.3 Modos de vibração de casos particulares de apoio.....	38
Viga simplesmente apoiada.....	40
Viga bi-encastada.....	42
Viga encastada/apoiada.....	45
Viga em consola.....	46
Viga com um apoio simples .....	48
Viga livre.....	49
<b>3. Modos de vibração de uma viga descontínua .....</b>	<b>53</b>
3.1 Forças de fixação.....	54
Viga bi-encastada.....	54
Viga encastada/apoiada.....	58
3.2 Matriz de rigidez .....	61
3.3 Frequências naturais e modos de vibração .....	66
<b>4. Viga descontínua sujeita a uma carga móvel.....</b>	<b>85</b>
4.1 Solução particular.....	85
4.2 Solução não amortecida.....	90
Solução para a carga móvel em sentido inverso .....	117
4.3 Solução amortecida .....	131
<b>5. Conclusões.....</b>	<b>139</b>
<b>Bibliografia .....</b>	<b>141</b>

# Índice de figuras

## 1. Introdução

1.1 Esquerda: comboio a diesel da British Rail do final dos anos 80, atinge os 120 km/h Direita: comboio eléctrico da West Japan Railway Company, do final dos anos 90, atinge os 320 km/h (fonte: Wikipedia) .....	25
1.2 Comparação de um sistema discreto (nós e linhas a preto) com um contínuo (linha a vermelho).....	26
1.3 Comparação entre o método dos elementos finitos (FEM) a análise isogeométrica (NURBS) [4] .....	29

## 2. Vibrações transversais em vigas finitas

2.1 Viga contínua sobre uma fundação visco-elástica actuada por um carregamento variável ao longo do tempo .....	31
2.2 Troço da viga de comprimento $dx$ .....	32
2.3 Representação gráfica dos quatro primeiros modos de vibração da viga simplesmente apoiada, a vermelho, verde, azul e amarelo, respectivamente, para $L$ unitário .....	42
2.4 Função $-1 + \cos(\lambda) \cosh(\lambda)$ no intervalo $\lambda = [0;8]$ .....	43
2.5 Função $-1 + \cos(\lambda) \cosh(\lambda)$ no intervalo $\lambda = [8;15]$ .....	43
2.6 Representação gráfica dos quatro primeiros modos de vibração da viga bi-encastada, a vermelho, verde, azul e amarelo, respectivamente, para $L$ unitário .....	45
2.7 Representação gráfica dos quatro primeiros modos de vibração da viga encastada/apoiada, a vermelho, verde, azul e amarelo, respectivamente, para $L$ unitário .....	46
2.8 Representação gráfica dos quatro primeiros modos de vibração da viga em consola, a vermelho, verde, azul e amarelo, respectivamente, para $L$ unitário .....	48
2.9 Representação gráfica dos quatro primeiros modos de vibração da viga com um único apoio simples, a vermelho, verde, azul e amarelo, respectivamente, para $L$ unitário .....	49
2.10 Representação gráfica dos quatro primeiros modos de vibração da viga livre, a vermelho, verde, azul e amarelo, respectivamente, para $L$ unitário .....	51

## 3. Modos de vibração de uma viga descontínua

3.1 Viga descontínua sobre uma fundação visco-elástica.....	53
3.2 Convenção de sinais da resistência de materiais para os esforços internos .....	56
3.3 Convenção de sinais empregue para as forças de fixação .....	56
3.4 Graus de liberdade de uma viga genérica .....	62
3.5 Forças de fixação para uma translação unitária em $x = L_1$ .....	62
3.6 Forças de fixação para uma rotação unitária em $x = L_1$ .....	64



3.7 Representação de raízes com componente real ou imaginária (a) e raízes com componente real e imaginária (b) .....	69
3.8 Secção transversal do perfil UIC60 (unidade: mm) Chen <i>et al.</i> [2] .....	70
3.9 Funções hiperbólicas (fonte: Wikipedia) .....	71
3.10 Representação gráfica da equação (3.79) no intervalo que contém as primeiras 200 raízes .....	71
3.11 Representação gráfica da parte real da parcela esquerda da equação (3.79) no intervalo de $(k_1/m)^{1/2}$ a $(k_2/m)^{1/2}$ .....	73
3.12 Representação gráfica da parte imaginária da parcela esquerda da equação (3.79) no intervalo de $(k_1/m)^{1/2}$ a $(k_2/m)^{1/2}$ .....	73
3.13 Comparação entre as primeiras 50 frequências naturais da viga descontínua e das duas vigas bi-apoiadas com rigidez de fundação $k_1$ e $k_2$ .....	74
3.14 Primeiro modo de vibração normalizado da viga descontínua .....	78
3.15 Primeiro modo de vibração normalizado da viga descontínua no troço de maior rigidez .....	79
3.16 Segundo modo de vibração normalizado da viga descontínua .....	79
3.17 Décimo quarto modo de vibração normalizado da viga descontínua .....	80
3.18 Décimo quinto modo de vibração normalizado da viga descontínua .....	80
3.19 Décimo sexto modo de vibração normalizado da viga descontínua .....	81
3.20 Vigésimo primeiro modo de vibração normalizado da viga descontínua .....	81
3.21 Vigésimo quinto modo de vibração normalizado da viga descontínua .....	82
3.22 Trigésimo modo de vibração da viga descontínua .....	83
3.23 Quadragésimo modo de vibração da viga descontínua .....	83
3.24 Quinquagésimo modo de vibração da viga descontínua .....	83

#### **4. Viga descontínua sujeita a uma carga móvel**

4.1 Deformada quase-estacionária numa viga infinita de rigidez $k_1$ para velocidades sub-críticas ...	92
4.2 Deformada quase-estacionária numa viga infinita de rigidez $k_1$ para uma velocidade de 200 m/s .....	92
4.3 Deformada quase-estacionária numa viga infinita de rigidez $k_1$ para velocidades super-críticas .....	93
4.4 Estudo de convergência para a velocidade sub-crítica de 50 m/s .....	94
4.5 Estudo de convergência para a velocidade sub-crítica de 150 m/s .....	94
4.6 Estudo de convergência para a velocidade crítica do troço 1 .....	95
4.7 Estudo de convergência para a velocidade crítica do troço 2 .....	95
4.8 Pormenor do estudo de convergência para a velocidade crítica do troço 2 .....	96
4.9 Estudo de convergência para a velocidade super-crítica de 300 m/s .....	96
4.10 Pormenor do estudo de convergência para a velocidade super-crítica de 300 m/s .....	97

4.11 Modelo de estudo do caso estático com a carga à esquerda, sobre e à direita da descontinuidade .....	99
4.12 Deslocamento na viga ao longo do tempo para a solução estática .....	99
4.13 Deslocamento ascendente máximo em cada ponto da viga para a solução estática .....	100
4.14 Deslocamento descendente máximo em cada ponto da viga para a solução estática .....	101
4.15 Factor de amplificação do deslocamento ascendente em ambos os troços.....	104
4.16 Factor de amplificação do deslocamento descendente em ambos os troços.....	104
4.17 Deslocamento ascendente máximo em cada ponto da viga para os primeiros cinco valores de velocidade.....	105
4.18 Deslocamento ascendente máximo em cada ponto da viga para os últimos três valores de velocidade.....	105
4.19 Deslocamento descendente máximo em cada ponto da viga para os primeiros cinco valores de velocidade.....	106
4.20 Deslocamento descendente máximo em cada ponto da viga para os últimos três valores de velocidade.....	106
4.21 Deslocamentos em torno do ponto de descontinuidade para os instantes em que ocorrem os deslocamentos máximos para a velocidade crítica do troço 1, 205.574 m/s (círculo: ponto de aplicação da carga, cruz: ponto de deslocamento máximo).....	107
4.22 Deslocamentos em torno do ponto de descontinuidade para os instantes em que ocorrem os deslocamentos máximos para a velocidade intermédia de 225 m/s (círculo: ponto de aplicação da carga, cruz: ponto de deslocamento máximo) .....	107
4.23 Deslocamento máximo ascendente devido à radiação de transição em ambos os troços .....	111
4.24 Deslocamento máximo descendente devido à radiação de transição em ambos os troços .....	111
4.25 Deslocamento ascendente máximo devido à radiação de transição em cada ponto da viga para os primeiros cinco valores de velocidade .....	112
4.26 Deslocamento ascendente máximo devido à radiação de transição em cada ponto da viga para os últimos três valores de velocidade e a velocidade crítica do troço 1 .....	112
4.27 Deslocamento descendente máximo devido à radiação de transição em cada ponto da viga para os primeiros cinco valores de velocidade .....	113
4.28 Deslocamento descendente máximo devido à radiação de transição em cada ponto da viga para os últimos três valores de velocidade e a velocidade crítica do troço 1 .....	113
4.29 Variação dos deslocamentos ascendentes máximos na viga descontínua devido à radiação de transição.....	115
4.30 Variação dos deslocamentos descendentes máximos na viga descontínua devido à radiação de transição.....	115
4.31 Deslocamento vertical no ponto de aplicação da carga para as velocidades de 50, 150 e 175 m/s .....	116
4.32 Deslocamento vertical no ponto de aplicação da carga para velocidades de 175, 205.574 e 225 m/s .....	116
4.33 Deslocamento vertical no ponto de aplicação da carga para 225, 244.740, 275 e 300 m/s.....	116

4.34 Factor de amplificação do deslocamento ascendente em ambos os troços para o sentido 2 ....	119
4.35 Factor de amplificação do deslocamento descendente em ambos os troços para o sentido 2 ..	120
4.36 Deslocamento ascendente máximo em cada ponto da viga para o sentido 2 e os primeiros cinco valores de velocidade .....	120
4.37 Deslocamento ascendente máximo em cada ponto da viga para o sentido 2 e os últimos três valores de velocidade e a velocidade crítica do troço 1 .....	121
4.38 Deslocamento descendente máximo em cada ponto da viga para o sentido 2 e os primeiros cinco valores de velocidade.....	121
4.39 Deslocamento descendente máximo em cada ponto da viga descontínua para o sentido 2 e os últimos três valores de velocidade e a velocidade crítica do troço 1 .....	122
4.40 Factor de amplificação do deslocamento ascendente no troço 1 para ambos os sentidos .....	122
4.41 Factor de amplificação do deslocamento descendente no troço 1 para ambos os sentidos .....	122
4.42 Factor de amplificação do deslocamento ascendente no troço 2 para ambos os sentidos .....	123
4.43 Factor de amplificação do deslocamento descendente no troço 2 para ambos os sentidos .....	123
4.44 Deslocamento máximo ascendente devido à radiação de transição para o sentido 2 em ambos os troços.....	124
4.45 Deslocamento máximo descendente devido à radiação de transição para o sentido 2 em ambos os troços.....	124
4.46 Deslocamento ascendente máximo devido em cada ponto da viga descontínua devido à radiação de transição para o sentido 2 e os primeiros cinco valores de velocidade .....	127
4.47 Deslocamento ascendente máximo devido em cada ponto da viga descontínua devido à radiação de transição para o sentido 2 e últimos três valores de velocidade e a velocidade crítica do troço 1 .....	127
4.48 Deslocamento descendente máximo devido em cada ponto da viga descontínua devido à transição de radiação para o sentido 2 e os primeiros cinco valores de velocidade .....	128
4.49 Deslocamento descendente máximo devido em cada ponto da viga descontínua devido à transição de radiação para o sentido 2 e últimos três valores de velocidade .....	128
4.50 Variação dos deslocamentos ascendentes máximos na viga descontínua devido à radiação de transição para o sentido 2 .....	129
4.51 Variação dos deslocamentos descendentes máximos na viga descontínua devido à radiação de transição para o sentido 2 .....	129
4.52 Deslocamento vertical no ponto de aplicação da carga para as velocidades de 50, 150 e 175 m/s .....	130
4.53 Deslocamento vertical no ponto de aplicação da carga para velocidades de 175, 205.574 e 225 m/s .....	130
4.54 Deslocamento vertical no ponto de aplicação da carga para 205.574, 244.740, 275 e 300 m/s .....	130
4.55 Comparação do factor de amplificação do deslocamento ascendente com e sem amortecimento .....	133

4.56 Comparação do factor de amplificação do deslocamento descendente com e sem amortecimento .....	134
4.57 Deslocamento ascendente máximo em cada ponto da viga com amortecimento .....	134
4.58 Deslocamento descendente máximo em cada ponto da viga com amortecimento .....	134
4.59 Deslocamento na viga com amortecimento ao longo do tempo para a velocidade de 50 m/s. 135	
4.60 Deslocamento na viga com amortecimento para a velocidade de 50 m/s no instante $t_s = 1$ m .....	135
4.61 Deslocamento na viga com amortecimento para a velocidade de 50 m/s no instante $t_s = 50$ m .....	136
4.62 Deslocamento na viga com amortecimento para a velocidade de 50 m/s no instante $t_s = 100$ m .....	136
4.63 Deslocamento na viga com amortecimento para a velocidade de 50 m/s no instante $t_s = 150$ m .....	136
4.64 Deslocamento na viga com amortecimento para a velocidade de 50 m/s no instante $t_s = 199$ m .....	137
4.65 Deslocamento vertical no ponto de aplicação da carga considerando o amortecimento para as velocidades de 50, 205.574, 225, 244.470 e 300 m/s .....	137

# Índice de quadros

## 2. Vibrações transversais em vigas finitas

2.1 Comparação entre as primeiras quatro frequências naturais de vibração não amortecida para os vários sistemas estudados.....	52
---	----

## 3. Modos de vibração de uma viga descontínua

3.1 Valores numéricos das propriedades mecânicas do problema em estudo .....	70
3.2 Raízes da parte real da equação característica no intervalo de $(k_1/m)^{1/2}$ a $(k_2/m)^{1/2}$ .....	72
3.3 Comparação entre as primeiras 15 frequências naturais cíclicas (em rad/s) da viga descontínua e das duas vigas bi-apoiadas com rigidez de fundação $k^1$ e $k^2$ .....	74
3.4 Número de picos em ambos os troços para os primeiros 60 modos naturais de vibração .....	82

## 4. Viga descontínua sujeita a uma carga móvel

4.1 Deslocamentos máximos na viga descontínua para a solução estática .....	100
4.2 Deslocamentos máximos na viga para a velocidade sub-crítica de 50 m/s .....	101
4.3 Deslocamentos máximos na viga para a velocidade sub-crítica de 150 m/s .....	101
4.4 Deslocamentos máximos na viga para a velocidade sub-crítica de 175 m/s .....	102
4.5 Deslocamentos máximos na viga para a velocidade crítica do troço 1, 205.574 m/s.....	102
4.6 Deslocamentos máximos na viga para a velocidade intermédia de 225 m/s.....	102
4.7 Deslocamentos máximos na viga para a velocidade crítica do troço 2, 244.470 m/s.....	102
4.8 Deslocamentos máximos na viga para a velocidade super-crítica de 275 m/s .....	103
4.9 Deslocamentos máximos na viga para a velocidade super-crítica de 300 m/s .....	103
4.10 Deslocamentos máximos na viga devido à radiação de transição para a velocidade sub-crítica de 50 m/s .....	109
4.11 Deslocamentos máximos na viga devido à radiação de transição para a velocidade sub-crítica de 150 m/s .....	109
4.12 Deslocamentos máximos na viga devido à radiação de transição para a velocidade sub-crítica de 175 m/s .....	109
4.13 Deslocamentos máximos na viga devido à radiação de transição para a velocidade crítica do troço 1, 205.574 m/s.....	109
4.14 Deslocamentos máximos na viga devido à radiação de transição para a velocidade intermédia de 225 m/s .....	110
4.15 Deslocamentos máximos na viga devido à radiação de transição para a velocidade crítica do troço 2, 244.470 m/s.....	110
4.16 Deslocamentos máximos na viga devido à radiação de transição para a velocidade super-crítica de 275 m/s .....	110

4.17 Deslocamentos máximos na viga devido à radiação de transição para a velocidade super-crítica de 300 m/s.....	110
4.18 Variação dos deslocamentos ascendentes máximos na viga descontínua devido à radiação de transição.....	114
4.19 Variação dos deslocamentos descendentes máximos na viga descontínua devido à radiação de transição.....	114
4.20 Deslocamentos máximos na viga para o sentido 2 e velocidade sub-crítica de 50 m/s.....	117
4.21 Deslocamentos máximos na viga para o sentido 2 e velocidade sub-crítica de 150 m/s.....	117
4.22 Deslocamentos máximos na viga para o sentido 2 e velocidade sub-crítica de 175 m/s.....	118
4.23 Deslocamentos máximos na viga para o sentido 2 e velocidade crítica do troço 1, 205.574 m/s .....	118
4.24 Deslocamentos máximos na viga para o sentido 2 e velocidade intermédia de 225 m/s.....	118
4.25 Deslocamentos máximos na viga para o sentido 2 e velocidade crítica do troço 2, 244.470 m/s .....	118
4.26 Deslocamentos máximos na viga para o sentido 2 e velocidade super-crítica de 275 m/s.....	119
4.27 Deslocamentos máximos na viga para o sentido 2 e velocidade super-crítica de 300 m/s.....	119
4.28 Deslocamentos máximos devido à radiação de transição para o sentido 2 e velocidade sub-crítica de 50 m/s.....	124
4.29 Deslocamentos máximos devido à radiação de transição para o sentido 2 e velocidade sub-crítica de 150 m/s.....	124
4.30 Deslocamentos máximos devido à radiação de transição para o sentido 2 e velocidade sub-crítica de 175 m/s.....	124
4.31 Deslocamentos máximos devido à radiação de transição, sentido 2 e velocidade crítica do troço 1, 205.574 m/s .....	124
4.32 Deslocamentos máximos devido à radiação de transição para o sentido 2 e velocidade intermédia de 225 m/s.....	125
4.33 Deslocamentos máximos devido à radiação de transição, sentido 2 e velocidade crítica do troço 2, 244.470 m/s .....	125
4.34 Deslocamentos máximos devido à radiação de transição para o sentido 2 e velocidade super-crítica 275 m/s .....	125
4.35 Deslocamentos máximos devido à radiação de transição para o sentido 2 e velocidade super-crítica 300 m/s .....	125
4.36 Variação dos deslocamentos ascendentes máximos devido à radiação de transição para o sentido 2.....	128
4.37 Variação dos deslocamentos descendentes máximos devido à radiação de transição para o sentido 2.....	129
4.38 Deslocamentos máximos na viga com amortecimento para a velocidade sub-crítica de 50 m/s .....	132
4.39 Deslocamentos máximos na viga com amortecimento para a velocidade crítica do troço 1, 205.574 m/s .....	132

4.40 Deslocamentos máximos na viga com amortecimento para a velocidade intermédia de 225 m/s .....	132
4.41 Deslocamentos máximos na viga com amortecimento para a velocidade crítica do troço 2, 244,470 m/s .....	133
4.42 Deslocamentos máximos na viga com amortecimento para a velocidade super-crítica de 300 m/s .....	133





# 1 – Introdução

O desenvolvimento dos meios de transporte, especialmente os colectivos, é frequentemente no sentido de atingir maiores velocidades (veja-se o exemplo dado na figura 1.1) e, ao mesmo tempo, transportar mais carga e passageiros, o que leva a veículos maiores e mais pesados. Por outro lado, à medida que o conhecimento dos materiais avança, as estruturas sobre as quais estes veículos se deslocam são progressivamente mais esbeltas e leves.

Isto significa que o efeito dinâmico que os veículos têm nas estruturas é largamente superior ao efeito estático, o que torna a análise das vibrações estruturais um ponto cada vez mais fulcral na área das vias de comunicação. Isto é facilmente compreensível por analogia com um oscilador de um grau de liberdade com rigidez relativamente baixa, e toda a massa concentrada num único ponto. Este sistema, quando excitado, apresentará grandes deslocamentos, e consequentemente grandes esforços nos elementos estruturais.



**Figura 1.1** • Esquerda: comboio a diesel da British Rail do final dos anos 80, atinge os 120 km/h  
Direita: comboio eléctrico da West Japan Railway Company, 1997, atinge os 320 km/h (fonte: Wikipedia)

Um fenómeno que tem vindo a receber atenção considerável recentemente (veja-se [1], [3], [8], [11], [12], [14] e [16]) é o da vibração induzida por comboios de alta velocidade quando transitam por zonas em que ocorrem mudanças bruscas na rigidez vertical do sistema solo-carril. Este tipo de vibrações não só desgasta a via e o veículo, como pode pôr em causa a estabilidade do último e causar uma viagem desconfortável para os passageiros.

Associado a este existe também um fenómeno que ocorre quando o veículo ferroviário viaja a velocidades críticas ou super-críticas<sup>1</sup>, especialmente em solos de fraca qualidade, onde a velocidade de propagação das ondas é tão baixa que o próprio veículo a ultrapassa, passando a viajar sobre as ondas gerados pelo seu próprio deslocamento.

As mudanças súbitas na rigidez podem dever-se a variações a nível geotécnico, mas também a diferenças na solução estrutural adoptada, como seja a entrada em viadutos, pontes ou túneis. Muitas vezes estas transições consistem na mudança entre uma zona em que o carril assenta sobre balastro para uma laje de betão. Sendo então estas descontinuidades necessárias ou mesmo inevitáveis, é importante estudar o comportamento dinâmico da via nestas situações, para que esta e o veículo sejam dimensionados em concordância com os deslocamentos expectáveis.

Pretende-se estudar analiticamente as vibrações transversais numa viga finita na qual se verifica este tipo de descontinuidade a nível da rigidez vertical, considerando para o efeito várias velocidades e ambos os sentidos possíveis de deslocamento.

Ao longo dos seguintes capítulos apresentar-se-á um estudo detalhado da aplicação do método da sobreposição modal a este problema.

No capítulo 2 deduz-se a equação de movimento da estrutura de forma semelhante à apresentada em muita da bibliografia disponível sobre o assunto, como é o caso de Frýba [6] e Meirovitch [8]. Obtém-se de seguida a sua solução homogénea, da qual resulta a definição do modo normal de vibração. São por fim calculadas as frequências naturais de vibração livre não amortecida para vários casos simples.

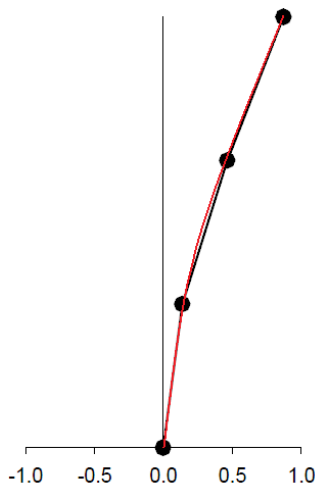
No capítulo 3 é feita a análise modal da viga descontínua em estudo, obtendo-se a sua equação característica, frequências naturais e respectivos modos de vibração.

Por fim, no capítulo 4, determina-se a solução particular da equação de movimento para uma carga móvel de intensidade e velocidade constantes, e aplica-se esta solução à viga estudada no capítulo anterior. Segue-se uma análise extensa das vibrações deste sistema para várias velocidades, com e sem amortecimento.

### 1.1 – Sistemas oscilatórios discretos e contínuos

No caso em estudo, e como é frequente no estudo de estruturas essencialmente unidimensionais de grande comprimento, opta-se por modelar o sistema oscilatório solo-carril como sendo contínuo.

A diferença essencial entre sistemas dinâmicos discretos e contínuos é que os primeiros têm um número finito de graus de liberdade, enquanto os últimos têm infinitos graus de liberdade. Enquanto nos sistemas discretos estão associados a cada grau de liberdade uma massa e coordenadas em repouso bem definidas, tem-se nos contínuos uma ou mais variáveis espaciais independentes, identificando a posição de infinitos pontos de massa infinitesimal.



**Figura 1.2** • Comparação de um sistema discreto (nós e linhas a preto) com um contínuo (linha a vermelho)

Por esta razão, os sistemas discretos são governados por equações diferenciais ordinárias, e os sistemas contínuos por equações diferenciais parciais. Além, disso, os primeiros apresentam um número finito de valores próprios (tantos quanto o número de graus de liberdade), e consequentemente um número finito de vectores próprios, enquanto os últimos têm um número infinito de vectores próprios. Ver-se-á de seguida o significado dos valores e vectores próprios no contexto da vibração de sólidos.

Desde que o sistema contínuo seja delimitado espacialmente, o número de valores e vectores próprios é infinito mas enumerável.

## 1.2 – Sobreposição modal

De extrema importância para a análise de vibrações é o conceito de modo normal. Este consiste num padrão de movimento em que todos os pontos do sistema oscilatório se movem segundo uma função sinusoidal e com a mesma frequência. Todos os pontos estão na mesma fase, e por isso atingem o estado de equilíbrio e de máxima amplitude ao mesmo tempo. À frequência na qual vibra cada modo, que corresponde a um dos valores próprios da equação característica do sistema, chama-se frequência natural de vibração livre não amortecida.

Sendo então os modos normais soluções da equação de movimento para uma única frequência, o movimento genérico do sistema oscilatório pode ser obtido por sobreposição dos modos normais. A designação de normal implica que estes se podem mover independentemente, pelo que a excitação de um modo não causará movimento noutra modo.

A equação de movimento (na forma matricial) de um sistema oscilatório discreto em vibração livre não amortecida pode ser descrita genericamente como

$$[M] \cdot \{\ddot{y}(t)\} + [K] \cdot \{y(t)\} = \{0\}, \quad (1.1)$$

em que  $[M]$  representa a matriz de massa do sistema,  $[K]$  a sua matriz de rigidez e  $\{y(t)\}$  a sua configuração deformada relativamente ao ponto de equilíbrio para o instante de tempo  $t$ . Assumindo que a variação da amplitude das vibrações ao longo do tempo é sinusoidal e com frequência de vibração  $\omega$ , obtém-se

$$[[K] - \omega^2 [M]] \cdot \{\Phi\} = \{0\}, \quad (1.2)$$

em que  $\{\Phi\}$  representa a configuração deformada da estrutura associada à frequência  $\omega$ , que não varia com o tempo, isto é, o modo normal de vibração não amortecida que corresponde a uma das frequências naturais de vibração não amortecidas.

Está-se portanto perante um problema de valores e vectores próprios: para que esta equação tenha uma solução não trivial (isto é, um  $\omega$  ao qual corresponda um  $\{\Phi\}$  não nulo), o determinante da matriz tem que ser nulo:

$$|[K] - \omega^2 [M]| = 0. \quad (1.3)$$

Assim, para cada valor de  $\omega_i$  que respeite esta equação, existe um  $\{\Phi_i\}$  que consiste na deformada que lhe corresponde. Embora a configuração deformada seja única, a amplitude global dos deslocamentos é puramente arbitrária, pelo que geralmente se aplica uma norma à mesma para facilitar a sua representação e comparação com outros modos normais. Uma vez que esta norma carece de significado físico, é escolhida com fins puramente práticos, de forma a tomar partido da ortogonalidade relativamente à matriz de massa.

Os modos normais de vibração têm como propriedade principal serem ortogonais relativamente às matrizes de massa e de rigidez, isto é

$$\{\Phi_m\}^T \cdot [M] \cdot \{\Phi_n\} = 0, \quad m \neq n, \quad (1.4)$$

$$\{\Phi_m\}^T \cdot [K] \cdot \{\Phi_n\} = 0, \quad m \neq n. \quad (1.5)$$

Esta é uma condição útil para realizar a sobreposição modal, pois permite desacoplar as equações expressas em coordenadas modais. A sobreposição modal consiste essencialmente em expressar a deformação como

$$\{y(t)\} = \sum_{i=1}^{\infty} \{\Phi\}_i f_i(t), \quad (1.6)$$

sendo  $f_i(t)$  designado por deslocamento generalizado do modo  $i$ . Uma vez que os modos apenas definem configurações deformadas, é esta função que irá determinar a amplitude de cada modo ao longo do tempo, determinando assim a sua contribuição para o movimento oscilatório do sistema.

Uma vez que não é possível fazer a sobreposição de um número infinito de modos, ter-se-á que escolher um número considerado satisfatório. Regra geral, para grande parte das excitações, os primeiros modos são os que têm maior contribuição, mas no caso das cargas móveis isto apenas é verdade para velocidades mais baixas. À medida que a velocidade aumenta, vão sendo precisos cada vez mais modos. Visto o tema de estudo serem os comboios de alta velocidade, será então necessário considerar um número elevado de modos.

Embora as considerações acima se refiram a um sistema discreto, podem facilmente ser generalizadas para um sistema contínuo delimitado. Em vez de o movimento ser descrito por um vector  $\{y(t)\}$ , passa a ser uma função de espaço e de tempo,  $y(x,t)$ , e o mesmo ocorre para as restantes propriedades do sistema (massa, rigidez e eventual amortecimento).

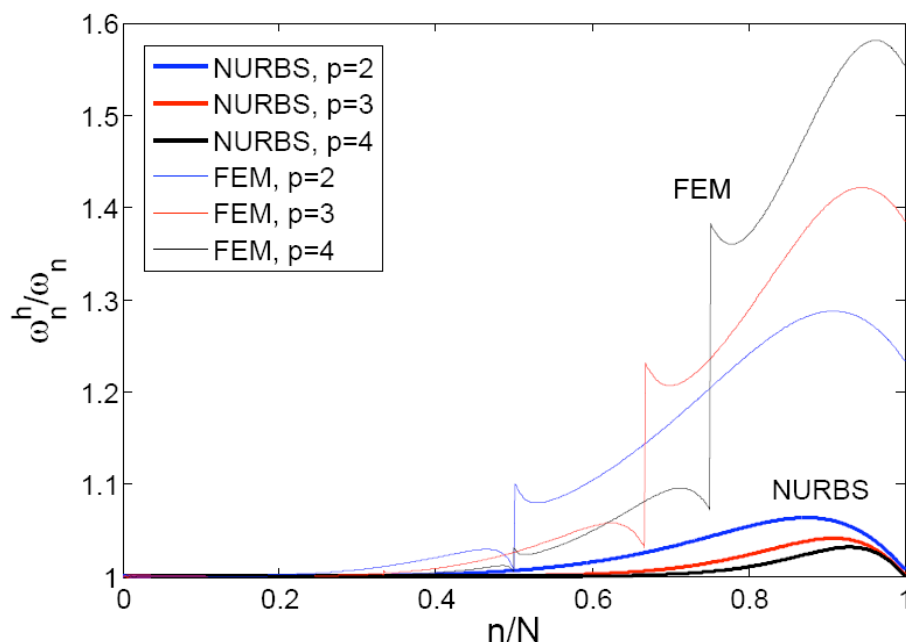
### 1.3 – Método analítico e método dos elementos finitos

O método dos elementos finitos, dada a sua natureza finita, é equivalente a um sistema oscilatório discreto. Não quer isto dizer que os seus resultados são necessariamente piores do que um sistema contínuo, especialmente quando se considera um grande número de graus de liberdade, mas alguns problemas dinâmicos dão origem a soluções pouco fiáveis quando analisados pelo método dos elementos finitos.

No caso de fenómenos dinâmicos em que os modos e frequências mais elevados têm grande contribuição, o método dos elementos finitos apresenta um erro pouco tolerável, pois as funções empregues são polinomiais. Estas são adequadas para aproximar deformações estáticas, mas para o caso dinâmico as funções que melhor representam o deslocamento são as trigonométricas (devido à forma sinusoidal da deformada). Outro dos problemas associados ao método dos elementos finitos é que apenas é garantida a continuidade dos deslocamentos entre elementos, resultando em funções com classe de diferenciabilidade  $C^0$  (existe

compatibilização dos deslocamentos, mas não das suas derivadas). Isto dificulta a sua aproximação aos modos normais de número mais elevado.

Em Cottrell *et al.* [4] é feita uma comparação entre o método dos elementos finitos e um método em desenvolvimento pelos autores, designado por análise isogeométrica. A figura 1.3 representa o erro na frequência natural (e consequentemente no modo normal correspondente) para cada grau de liberdade  $n$  de um total de  $N$ , usando várias aproximações (quadrática, cúbica e quádrlica).



**Figura 1.3** • Comparação entre o método dos elementos finitos (FEM) e a análise isogeométrica (NURBS) [4]

Como se pode ver, o método dos elementos finitos apresenta um erro bastante apreciável para os modos mais elevados, o que o torna pouco fiável no tipo de análise a realizar. Mais, independentemente do número de elementos considerados, a partir do modo  $n = N / 2$  existe grande divergência, pelo que para estudar um caso em que os primeiros 100 modos têm grande contribuição seria necessário considerar 200 elementos.

Embora a resolução de problemas dinâmicos através do método dos elementos finitos seja geralmente por aplicação da análise transiente e não por sobreposição modal, o facto de este não conseguir aproximar correctamente as frequências naturais mais elevadas implica que também não conseguirá dar uma resposta satisfatória caso estas contribuam para o comportamento dinâmico.

Uma alternativa é resolver o problema de forma puramente analítica. Ao resolver a equação de movimento homogénea é possível obter a expressão geral dos modos normais de vibração, que apresentará várias constantes de integração. Estas podem ser resolvidas através da equação característica do sistema, obtendo-se assim a frequência natural de vibração não amortecida, e determinando-se as constantes de integração referidas, com excepção de uma, visto o modo de vibração não definir amplitudes.

Normalizam-se então os modos de vibração e, através destes e da equação de movimento (desta vez para uma dada carga  $p(x,t)$ ), é possível determinar a coordenada generalizada e assim efectuar a sobreposição modal.

## 1. Introdução

---

O método analítico apresenta, além da questão de precisão para os modos de número mais elevado (pois uma vez que não emprega aproximações, obtém-se o modo de vibração real da estrutura), a vantagem de não ser necessário estudar todos os instantes de tempo que conduzem a um certo estado. Quer isto dizer que, caso se esteja interessado conhecer os deslocamentos na estrutura apenas para dado instante  $t = t_1$ , é possível obter os resultados com a mesma facilidade que para qualquer outro instante de tempo, independentemente de ser próximo do instante inicial ou não.

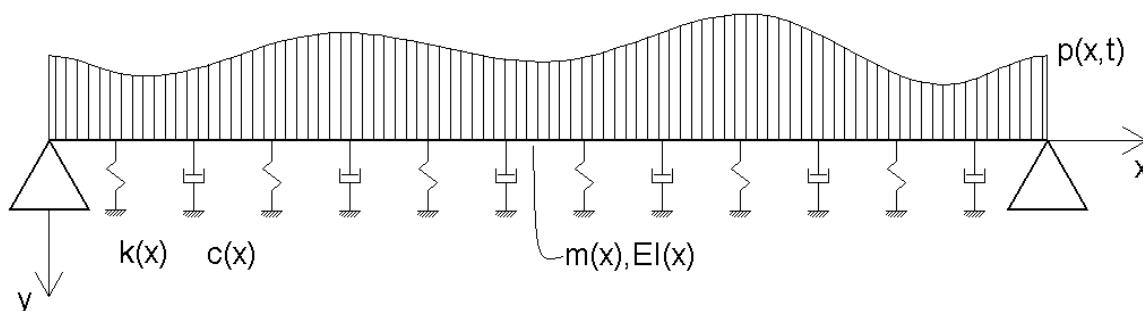
No método dos elementos finitos isto não é possível: a deformada da estrutura para um dado instante depende sempre da deformada no instante anterior. Isto não só leva à necessidade de obter valores intermédios que podem não ter utilidade directa para o problema em estudo, como muitas vezes obriga à adopção de um intervalo de tempo relativamente pequeno para obtenção de resultados fiáveis, aumentando assim o consumo de recursos computacionais.

Note-se que para casos especialmente complexos, em que é difícil ou mesmo impossível obter soluções analíticas, este método perde muita da sua utilidade face ao método dos elementos finitos, mas o facto de providenciar soluções exactas para casos simples é muito útil para servir de calibração para os métodos numéricos aproximados.

Não é objectivo da presente dissertação propor uma alternativa ao método dos elementos finitos, mas sim estudar o fenómeno associado à radiação de transição através de um método que neste caso não só é adequado como conduz a resultados fiáveis.

## 2 – Vibrações transversais em vigas finitas

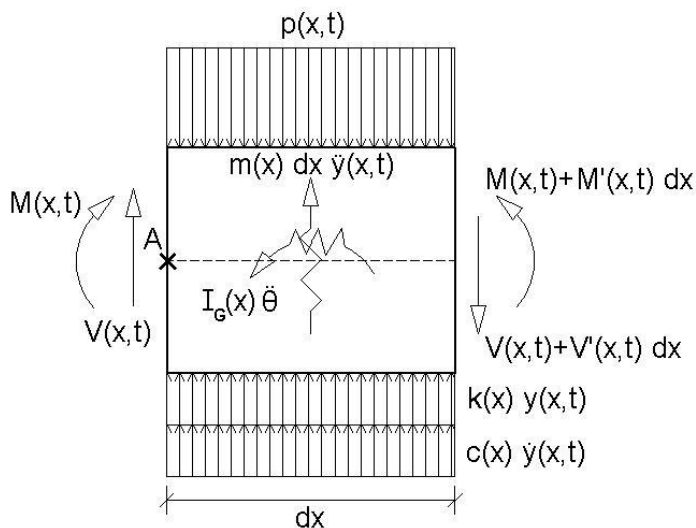
Suponha-se uma viga contínua de comprimento  $L$ , como exemplificado na figura 2.1, com condições de apoio genéricas, incluindo fundação visco-elástica com coeficientes de rigidez e de amortecimento  $k(x)$  e  $c(x)$ , respectivamente. Considera-se que a massa e rigidez de flexão são constantes ao longo do tempo e dadas por  $m(x)$  e  $EI(x)$ , respectivamente, e que a viga é actuada por um carregamento genérico, variável ao longo do espaço e do tempo, designado por  $p(x,t)$ . Como resultado do carregamento aplicado, a viga irá apresentar uma deformada também variável ao longo do tempo, que designamos por  $y(x,t)$ , medida a partir da sua deformada devido ao peso próprio.



**Figura 2.1** • Viga contínua sobre uma fundação visco-elástica actuada por um carregamento variável ao longo do tempo

### 2.1 – Equação de movimento

Se se considerar o troço de comprimento infinitesimal  $dx$  representado na figura 2.2, podem-se equilibrar as forças internas com as cargas aplicadas e a força de inércia para assim obter a equação de equilíbrio dinâmico, ou equação de movimento. É de notar que se podem assumir tanto a carga distribuída como as reacções da fundação visco-elástica como uniformemente distribuídas, uma vez que o troço da viga considerado tem comprimento infinitesimal.



**Figura 2.2** • Troço da viga de comprimento  $dx$

Começa-se por expressar o equilíbrio de forças verticais num dado instante de tempo  $t$ ,

$$\begin{aligned}
 \sum F_v &= 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow V(x,t) - V(x,t) - \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} dx + m(x) dx \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \\
 &\quad - p(x,t) dx + c(x) \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} dx + k(x) y(x,t) dx = 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} + p(x,t) &= m(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + c(x) \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} + k(x) y(x,t).
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Seguidamente faz-se o equilíbrio dos momentos em torno do ponto A. Uma vez que a inércia de rotação em torno do centro de gravidade do troço é da ordem de  $dx^3$ , irá ser desprezada (tal como os restantes termos de maior ordem, como se verá de seguida). Este é procedimento habitual na análise de vigas, em que a inércia de rotação é frequentemente negligenciável face à inércia de translação vertical. Obtém-se assim

$$\begin{aligned}
 \sum M_A &= 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow -M(x,t) + M(x,t) + \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} dx - \left( V(x,t) + \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} dx \right) dx \\
 &\quad - p(x,t) dx \frac{dx}{2} + k(x) y(x,t) dx \frac{dx}{2} + c(x) \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} dx \frac{dx}{2} = 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} dx - V(x,t) dx - \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} dx^2 - p(x,t) \frac{dx^2}{2} \\
 &\quad + k(x) y(x,t) \frac{dx^2}{2} + c(x) \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \frac{dx^2}{2} = 0.
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Uma vez que o comprimento do troço é infinitesimal ( $dx \ll 1$ ) podem-se considerar nulos os termos de maior ordem ( $dx^2 \rightarrow 0$ ), obtendo assim

$$\frac{\partial M(x,t)}{\partial x} = V(x,t), \tag{2.3}$$

que é a conhecida equação de resistência dos materiais, uma vez que não apresenta termos de inércia. Tendo em conta (2.3) reescreve-se (2.1) da seguinte forma

$$\frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2} + p(x,t) = m(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + c(x) \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} + k(x) y(x,t). \tag{2.4}$$



Segundo a teoria de vigas de Euler-Bernouli, para pequenos deslocamentos, o momento flector numa viga relaciona-se com a sua deformada segundo a expressão

$$M(x,t) = -EI(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}, \quad (2.5)$$

obtendo-se assim

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ -EI(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right] + p(x,t) = m(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + c(x) \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} + k(x) y(x,t). \quad (2.6)$$

Para efeitos do sistema em estudo, admite-se que as características da secção, nomeadamente a rigidez de flexão ( $EI(x)$ ) e a massa por unidade de comprimento ( $m(x)$ ), são constantes. Da mesma forma, também os coeficientes que caracterizam a fundação elástica ( $k(x)$  e  $c(x)$ ) se mantêm constantes ao longo do comprimento, permitindo simplificar (2.6) e obter

$$EI \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + c \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} + k y(x,t) = p(x,t). \quad (2.7)$$

É esta a equação diferencial que rege o comportamento dinâmico da viga em estudo quando sujeita a um carregamento variável ao longo do tempo.

## 2.2 – Vibrações livres não amortecidas

Para obter as frequências e modos naturais não amortecidos do sistema é necessário estudar as vibrações livres não amortecidas, isto é, sem qualquer tipo de carregamento, o que consiste em obter a solução homogénea da equação (2.7), considerando o coeficiente de amortecimento nulo, que resulta em

$$EI \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + k y(x,t) = 0. \quad (2.8)$$

Sendo a função incógnita,  $y$ , dependente de duas variáveis,  $x$  e  $t$ , para obter a sua solução recorre-se à separação de variáveis. Este processo consiste em assumir que  $y$  é igual ao produto de duas funções, cada uma de uma única variável, ou seja,

$$y(x,t) = v(x)f(t). \quad (2.9)$$

Estando o problema em estudo bem definido (está fora do campo da não linearidade e da instabilidade dinâmica), é de solução única. Desde que a solução obtida satisfaça a equação de movimento, estará provado o pressuposto de que as variáveis são separáveis.

Obtêm-se as derivadas presentes na equação em estudo

$$\begin{aligned}\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} &= v(x) \frac{df(t)}{dt}, \\ \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} &= v(x) \frac{d^2 f(t)}{dt^2}, \\ \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} &= \frac{d^4 v(x)}{dx^4} f(t),\end{aligned}\tag{2.10}$$

e substituem-se então em (2.8)

$$EI \frac{d^4 v(x)}{dx^4} f(t) + m v(x) \frac{d^2 f(t)}{dt^2} + k v(x) f(t) = 0.\tag{2.11}$$

Isolando os termos que dependem da derivada em relação ao tempo dos restantes, a equação (2.11) toma a seguinte forma

$$f(t) \left( EI \frac{d^4 v(x)}{dx^4} + k v(x) \right) = -m v(x) \frac{d^2 f(t)}{dt^2} \Leftrightarrow \frac{f(t)}{\frac{d^2 f(t)}{dt^2}} = -m \frac{v(x)}{EI \frac{d^4 v(x)}{dx^4} + k v(x)}.\tag{2.12}$$

Pode-se assim verificar que a equação implica que uma expressão que é função unicamente de  $x$  (espaço) tem que ser igual a outra expressão que é função apenas de  $t$  (tempo). Assim sendo, a única hipótese de se verificar a equação é ambas as expressões serem iguais a uma constante, que designamos por  $\alpha$ , o que resulta em

$$-m \frac{v(x)}{EI \frac{d^4 v(x)}{dx^4} + k v(x)} = -\alpha \Leftrightarrow \alpha \left( EI \frac{d^4 v(x)}{dx^4} + k v(x) \right) - m v(x) = 0\tag{2.13}$$

e

$$\frac{f(t)}{\frac{d^2 f(t)}{dt^2}} = -\alpha \Leftrightarrow \alpha \frac{d^2 f(t)}{dt^2} + f(t) = 0.\tag{2.14}$$

Começando pela equação (2.13), que é dependente do espaço, ela pode ser escrita como

$$P(D) v(x) = 0,\tag{2.15}$$

em que  $P(D)$  é uma função polinomial do operador diferencial  $D$ , em que  $D^n$  representa a derivada de ordem  $n$ . Os zeros da função  $P(D)$  permitem determinar a solução da equação em estudo, e por isso diz-se que a equação

$$P(D) = 0 \quad (2.16)$$

é a equação característica da equação diferencial (2.13).

Tendo os zeros da equação característica, a solução da equação (2.13) é (assumindo que não existem raízes com grau de multiplicidade superior a 1) dada por

$$v(x) = \sum_{j=1}^n C_j e^{d_j x}, \quad (2.17)$$

em que  $d_j$  é uma das  $n$  soluções da equação característica, e  $C_j$  uma constante de integração, que será determinada por aplicação das condições de fronteira.

Neste caso  $P(D)$  é dado por

$$P(D) = \alpha EI D^4 + \alpha k - m. \quad (2.18)$$

Portanto, os zeros da equação característica são

$$P(D) = 0 \Leftrightarrow D^4 = \frac{m - \alpha k}{\alpha EI} \Leftrightarrow D = \pm \sqrt[4]{\pm \sqrt{\frac{m}{\alpha EI} - \frac{k}{EI}}}. \quad (2.19)$$

Embora a incógnita  $\alpha$  seja necessariamente positiva (ver-se-á mais à frente o porquê), é possível que o argumento da raiz seja negativo. Contudo, de momento esta distinção não é importante, e definem-se por conveniência as raízes da equação como quatro casos distintos:

$$d_1 = \sqrt[4]{\frac{m}{\alpha EI} - \frac{k}{EI}}, \quad d_2 = -\sqrt[4]{\frac{m}{\alpha EI} - \frac{k}{EI}}, \quad d_3 = i\sqrt[4]{\frac{m}{\alpha EI} - \frac{k}{EI}}, \quad d_4 = -i\sqrt[4]{\frac{m}{\alpha EI} - \frac{k}{EI}}. \quad (2.20)$$

Estas soluções podem ser reescritas considerando a constante  $\lambda$ ,

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{m L^4}{\alpha EI} - \frac{k L^4}{EI}}, \quad (2.21)$$

$$d_1 = \lambda/L, \quad d_2 = -\lambda/L, \quad d_3 = i \lambda/L, \quad d_4 = -i \lambda/L. \quad (2.22)$$

## 2. Vibrações transversais em vigas finitas

---

Tem-se portanto que a solução da equação (2.13), segundo o que foi exposto em (2.17), é dada por

$$\begin{aligned} v(x) &= C_1 e^{\lambda/L x} + C_2 e^{-\lambda/L x} + C_3 e^{i\lambda/L x} + C_4 e^{-i\lambda/L x} \\ &= C_1 (\cosh(\lambda x/L) + \sinh(\lambda x/L)) + C_2 (\cosh(\lambda x/L) - \sinh(\lambda x/L)) \\ &\quad + C_3 (\cos(\lambda x/L) + i \sin(\lambda x/L)) + C_4 (\cos(\lambda x/L) - i \sin(\lambda x/L)). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Uma vez que  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ , e  $C_4$  são constantes que serão determinadas por imposição das condições de fronteira, podem ser reagrupadas e substituídas por outras constantes conforme necessário, e assim temos

$$\begin{aligned} v(x) &= \underbrace{(C_1 + C_2)}_A \cosh(\lambda x/L) + \underbrace{(C_1 - C_2)}_B \sinh(\lambda x/L) \\ &\quad + \underbrace{(C_3 + C_4)}_C \cos(\lambda x/L) + \underbrace{(C_3 - C_4)}_D i \sin(\lambda x/L) \\ &= A \cosh(\lambda x/L) + B \sinh(\lambda x/L) + C \cos(\lambda x/L) + D \sin(\lambda x/L). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Esta expressão consiste na configuração deformada para um valor válido da constante  $\lambda$ . Uma vez que não depende do tempo, a forma geral da deformada da viga quando em vibração livre é a mesma, variando apenas a amplitude ao longo do tempo. Isto significa que todos os pontos atingem o equilíbrio ao mesmo tempo, mas com amplitudes diferentes.

Estas configurações deformadas são habitualmente apresentadas na forma normalizada, o que introduz uma relação condicional entre as quatro constantes de integração, dependendo da norma empregue.

Voltando agora à equação (2.14), aplica-se o mesmo procedimento aplicado a (2.13). A equação característica é dada por

$$\alpha D^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow D^2 + \frac{1}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow D = \pm i \sqrt{\frac{1}{\alpha}}. \quad (2.25)$$

Introduzindo uma constante  $\omega$ , definida como

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\alpha}}, \quad (2.26)$$

podem escrever-se as raízes da equação característica como

$$d_5 = i \omega, \quad d_6 = -i \omega. \quad (2.27)$$

Tal como foi mencionado na resolução da equação (2.13), considera-se que  $\alpha$  é necessariamente positivo. A razão de ser desta escolha prende-se com o significado físico da constante  $\omega$ , como se verá mais à frente.

A solução da equação (14) é então dada por

$$\begin{aligned} f(t) &= C_5 e^{i\omega t} + C_6 e^{-i\omega t} = \\ &= C_5 (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) + C_6 (\cos(\omega t) - i \sin(\omega t)) \\ &= \underbrace{(C_5 + C_6)}_E \cos(\omega t) + \underbrace{(C_5 - C_6)}_F i \sin(\omega t) \\ &= E \cos(\omega t) + F \sin(\omega t), \end{aligned} \quad (2.28)$$

o que corresponde a um movimento harmónico simples. É esta componente dependente do tempo que completa a definição de um modo normal de vibração: para cada uma das configurações deformadas de vibração livre válidas existe uma frequência que lhe corresponde, a frequência natural de vibração não amortecida.

A designação de normal implica que cada modo de vibração é independente dos restantes, pelo que a excitação de um modo não causará movimento nos outros. A sobreposição dos vários modos, a vibrar à sua frequência natural, permite exprimir qualquer movimento oscilatório complexo da viga.

A constante  $\omega$  corresponde à frequência natural de vibração do sistema, um dos parâmetros que define o comportamento dinâmico da viga. A função  $f(t)$  dá-nos a amplitude ao longo do tempo. As constantes de integração  $E$  e  $F$  podem ser determinadas através da aplicação das condições iniciais.

Torna-se assim óbvio o porquê de se arbitrar  $\alpha$  necessariamente positivo: se pudesse tomar valores negativos, obter-se-iam valores não reais para a frequência natural de vibração, o que não teria significado físico no contexto do caso em estudo.

Uma vez que a expressão (2.28) é uma combinação linear das funções trigonométricas seno e cosseno, pode ser reescrita como um seno com um ângulo de fase, ou seja

$$f(t) = G \sin(\omega t + \varphi). \quad (2.29)$$

Tendo assim as duas parcelas que compõem a solução, pode-se expressar  $\lambda$  em função de  $\omega$  para obter

$$\frac{\lambda}{L} = \sqrt[4]{\frac{m\omega^2 - k}{EI}} \Leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{\lambda^4 EI}{L^4 m} + \frac{k}{m}} \quad (2.30)$$

e

$$y(x, t) = (A \cosh(\lambda x/L) + B \sinh(\lambda x/L) + C \cos(\lambda x/L) + D \sin(\lambda x/L)) G \sin(\omega t + \varphi). \quad (2.31)$$

Em termos matemáticos, a equação (2.31) é uma solução particular da equação diferencial (2.8). A solução completa será a soma de um número infinito de soluções particulares:

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} (A_i \cosh(\lambda_i x/L) + B_i \sinh(\lambda_i x/L) + C_i \cos(\lambda_i x/L) + D_i \sin(\lambda_i x/L)) \times G_i \sin(\omega_i t + \varphi_i). \quad (2.32)$$

Em termos físicos, pode-se interpretar esta solução como a sobreposição de movimentos mais simples, designados por modos de vibração, compondo assim um movimento vibratório complexo. Estes modos de vibração consistem em configurações de vibração livre às frequências naturais não amortecidas do sistema, e dependem portanto das condições de apoio do mesmo.

Obteve-se assim a solução genérica da equação de movimento não amortecido. Será a imposição das condições de apoio e iniciais que definirá o valor das várias constantes de integração e do ângulo de fase. Estas condições iniciais podem ser expressas como uma configuração deformada e/ou velocidade impostas à estrutura no instante  $t = 0$ , isto é

$$\begin{cases} y(x, 0) = F(x) \\ \dot{y}(x, 0) = G(x) \end{cases} \quad (2.33)$$

### 2.3 – Modos de vibração de casos particulares de apoio

Estudar-se-ão de seguida os modos de vibração da viga definida na secção 2.1, considerando várias condições de apoio possíveis.

Contudo, antes de passar às soluções específicas, convém analisar uma solução que é matematicamente válida para todos os casos que se seguem, mas que não é compatível com as condições de apoio presentes na maioria deles,

$$\lambda = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{k/m}. \quad (2.34)$$

É notória a semelhança desta solução com a de um sistema vibratório de um único grau de liberdade, em que a frequência de vibração é a raiz quadrada da razão entre a rigidez do sistema e a sua massa.

Relembrando as soluções apresentadas em (2.22), veremos que agora temos apenas uma única raiz de grau de multiplicidade 4,

$$d = 0. \quad (2.35)$$

Uma vez que já não temos várias raízes diferentes, mas sim uma única raiz de multiplicidade superior a 1, a definição exposta em (2.17) deixa de ser válida, pelo que é necessário aplicar a solução

$$v(x) = \sum_{j=1}^k C_j x^{j-1} e^{d x}, \quad (2.36)$$

em que  $k$  representa o grau de multiplicidade da raiz. Temos portanto

$$v(x) = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3. \quad (2.37)$$

Tratando-se a solução particular (2.37) de uma função polinomial, verifica-se que a maior parte das condições de apoio não permitem este tipo de deformada. Por exemplo, numa viga simplesmente apoiada, aplicando as restrições à translação e a obrigatoriedade de ter momento flector nulo em  $x = 0$  e  $x = L$ , tem-se

$$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0, \quad (2.38)$$

que, substituindo na equação (2.37) resulta numa solução trivial, ou seja, a ausência de vibração. Da mesma forma, a aplicação condições de apoio como encastramentos levará a uma solução trivial.

As únicas condições de apoio em que tal solução é válida são aquelas que permitam vibração de corpo rígido, ou seja, translação e/ou rotação sem deformação elástica da viga. Assim, a ausência total de apoios ou a presença de apenas um apoio simples são condições válidas para verificar esta solução. O primeiro caso permite a translação e rotação simultaneamente, enquanto que o segundo permite apenas rotação em torno do apoio. Estes sistemas não são hipo-estáticos, pois é possível encontrarem-se em equilíbrio estático devido à presença da fundação elástica.

Tendo posto então a raiz nula de lado, considera-se daqui para a frente que a solução pertence ao domínio

$$\lambda > 0, \quad (2.39)$$

excepto na abordagem dos dois sistemas mencionados, pois uma vez que a equação (2.24) é composta por funções simétricas e anti-simétricas, e pela definição (2.30), dois valores simétricos de  $\lambda$  conduzem à mesma frequência de vibração, teremos que para cada solução positiva existirá uma solução negativa que conduzirá ao mesmo modo de vibração.

### Viga simplesmente apoiada

Começa-se por determinar as frequências naturais de vibração para uma viga simplesmente apoiada em ambas as extremidades. Uma vez que se considera um caso de vibrações livres, as condições de fronteira não dependem do tempo, isto é, tratam-se apenas de condições de apoio e não de condições iniciais. Neste caso os deslocamentos nas extremidades são necessariamente nulos, bem como os momentos flectores, o que se traduz nas seguintes expressões:

$$y(0,t) = 0, \quad y(L,t) = 0, \quad M(0,t) = 0, \quad M(L,t) = 0. \quad (2.40)$$

Uma vez que as condições de fronteira devem ser sempre válidas para qualquer instante de tempo, podemos separar a parcela relativamente ao tempo, ou seja,

$$v(x_0)f(t) = 0, \quad \forall t \Rightarrow v(x_0) = 0. \quad (2.41)$$

Portanto, se tivermos também em conta a definição (2.5), (2.40) implica

$$v(0) = 0, \quad v(L) = 0, \quad \left. \frac{d^2 v(x)}{dx^2} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{d^2 v(x)}{dx^2} \right|_{x=L} = 0. \quad (2.42)$$

Substituindo  $v(x)$  tal como está definido em (2.24) obtêm-se as seguintes equações:

$$v(0) = A \cosh(0) + B \sinh(0) + C \cos(0) + D \sin(0) = 0 \Leftrightarrow A + C = 0, \quad (2.43)$$

$$v(L) = A \cosh(\lambda) + B \sinh(\lambda) + C \cos(\lambda) + D \sin(\lambda) = 0, \quad (2.44)$$

$$v''(0) = \frac{\lambda^2}{L^2} (A \cosh(0) + B \sinh(0) - C \cos(0) - D \sin(0)) = 0 \Leftrightarrow A - C = 0, \quad (2.45)$$

$$v''(L) = \frac{\lambda^2}{L^2} (A \cosh(\lambda) + B \sinh(\lambda) - C \cos(\lambda) - D \sin(\lambda)) = 0. \quad (2.46)$$

De (2.43) e (2.45) vem que  $A$  e  $C$  são necessariamente nulos, o que permite reescrever (2.44) e (2.46) como

$$B \sinh(\lambda) + D \sin(\lambda) = 0, \quad (2.47)$$

$$B \sinh(\lambda) - D \sin(\lambda) = 0. \quad (2.48)$$



Somando ambas as equações temos que

$$2 B \sinh(\lambda) = 0 \Rightarrow B = 0, \quad (2.49)$$

uma vez que, como foi referido em (2.39), não estamos a considerar a possibilidade de  $\lambda$  ser nulo. Substituindo (2.49) em (2.47) ou (2.48), vem que

$$D \sin(\lambda) = 0 \Rightarrow D = 0 \vee \sin(\lambda) = 0. \quad (2.50)$$

Uma vez que  $D$  nulo conduz a uma solução trivial, resta-nos

$$\sin(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = p\pi, \quad p \in \mathbb{N} \setminus 0 \Leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{(p\pi)^4 EI}{L^4 m} + \frac{k}{m}}, \quad p \in \mathbb{N} \setminus 0. \quad (2.51)$$

Considerando apenas as primeiras quatro soluções, tem-se

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\pi^4 \frac{EI}{L^4 m} + \frac{k}{m}} \approx \sqrt{97 \frac{EI}{L^4 m} + \frac{k}{m}}, \\ \omega_2 &= \sqrt{16 \pi^4 \frac{EI}{L^4 m} + \frac{k}{m}} \approx \sqrt{1559 \frac{EI}{L^4 m} + \frac{k}{m}}, \\ \omega_3 &= \sqrt{81 \pi^4 \frac{EI}{L^4 m} + \frac{k}{m}} \approx \sqrt{7890 \frac{EI}{L^4 m} + \frac{k}{m}}, \\ \omega_4 &= \sqrt{256 \pi^4 \frac{EI}{L^4 m} + \frac{k}{m}} \approx \sqrt{24937 \frac{EI}{L^4 m} + \frac{k}{m}}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

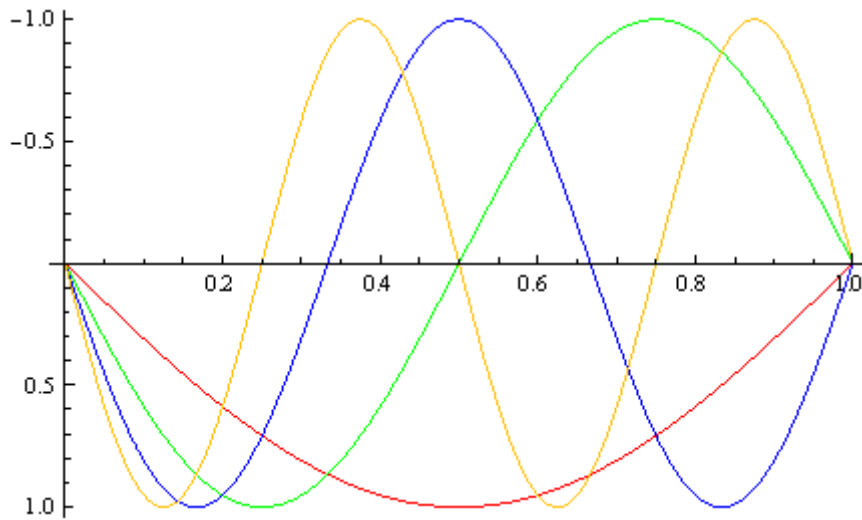
Estas são então as quatro primeiras frequências naturais de vibração não amortecida. Embora se possa substituir cada uma das soluções na equação (2.24) para assim obter o modo de vibração correspondente, é impossível determinar a constante  $D$ , o que é resultado da própria definição de modo de vibração: apenas define a forma como o sistema vibra, sem fornecer qualquer tipo de informação sobre a amplitude dessa vibração. De momento assume-se  $D$  unitário, mas, como foi referido, mais à frente definir-se-á uma norma apropriada.

Conclui-se assim que o  $i$ -ésimo modo de vibração é dado por

$$v_i(x) = \sin(i\pi x/L), \quad i \in \mathbb{N} \setminus 0, \quad (2.53)$$

e pode ser representado graficamente, como se observa na figura 2.3, onde se verifica que são respeitadas as condições de fronteira geométricas.

O procedimento acima descrito é válido não só para a viga bi-apoiada como também para qualquer combinação de condições de apoio ou mesmo sistemas de apoio com rigidez finita (representados regra geral com molas).



**Figura 2.3** • Representação gráfica dos quatro primeiros modos de vibração da viga simplesmente apoiada, a vermelho, verde, azul e amarelo, respectivamente, para  $L$  unitário

### Viga bi-encastrada

Considere-se então a viga bi-encastrada. As condições de fronteira (2.43) e (2.44) continuam a ser válidas, mas (2.45) e (2.46) devem ser substituídas por

$$v'(0) = \frac{\lambda}{L} (A \sinh(0) + B \cosh(0) - C \sin(0) + D \cos(0)) = 0 \Leftrightarrow B + D = 0 \quad (2.54)$$

e

$$v'(L) = \frac{\lambda}{L} (A \sinh(\lambda) + B \cosh(\lambda) - C \sin(\lambda) + D \cos(\lambda)) = 0 \Leftrightarrow \quad (2.55)$$

$$A \sinh(\lambda) + B \cosh(\lambda) - C \sin(\lambda) + D \cos(\lambda) = 0,$$

que representam a imposição de rotações nulas nos apoios.

Tratando-se de um sistema de equações homogêneas, podem-se sempre respeitar as condições de fronteira considerando todos os coeficientes nulos. Naturalmente que esta solução não é satisfatória, pois implica que não há vibração, e daí ser denominada por solução trivial.

Para obter uma solução não trivial é preciso garantir que o determinante da matriz dos coeficientes é nulo, o que requer determinar a equação característica e respectivos valores característicos.

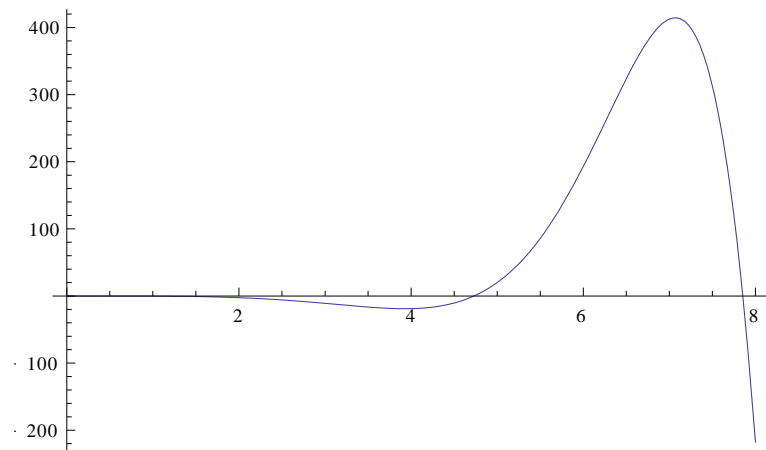
Colocando as quatro equações na forma matricial e calculando o seu determinante, tem-se

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \cosh(\lambda) & \sinh(\lambda) & \cos(\lambda) & \sin(\lambda) \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \sinh(\lambda) & \cosh(\lambda) & -\sin(\lambda) & \cos(\lambda) \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \quad (2.56)$$

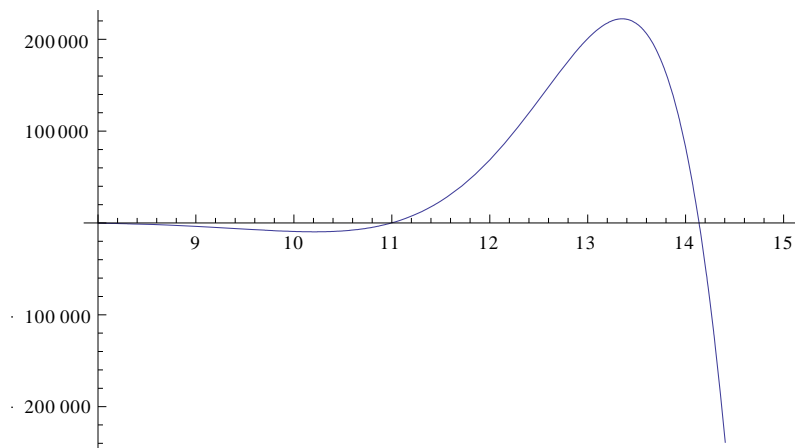
$$\Leftrightarrow -2 + 2 \cos(\lambda) \cosh(\lambda) = 0 \Leftrightarrow -1 + \cos(\lambda) \cosh(\lambda) = 0.$$

Uma vez que não é possível explicitar a função em ordem a  $\lambda$ , a resolução puramente analítica empregue para a viga bi-apoiada não é aplicável neste caso. Contudo, é possível obter soluções numericamente.

As figuras 2.4 e 2.5 representam a parcela esquerda da equação obtida em (2.56) em diferentes intervalos, mostrando para que valores de  $\lambda$  esta parcela toma valor nulo.



**Figura 2.4** • Função  $-1 + \cos(\lambda) \cosh(\lambda)$  no intervalo  $\lambda = [0;8]$



**Figura 2.5** • Função  $-1 + \cos(\lambda) \cosh(\lambda)$  no intervalo  $\lambda = [8;15]$

## 2. Vibrações transversais em vigas finitas

Dada a periodicidade da função cosseno, existem infinitas raízes da equação (2.56), mas apenas se consideram as quatro primeiras. É de notar o aumento muito acentuado dos valores da função quando passamos do intervalo em que se encontram as duas primeiras raízes para o seguinte. Isto dificulta a resolução numérica, pois para as raízes de maior ordem o valor da função começa a atingir uma grandeza difícil de manipular pelos programas de cálculo.

As quatro primeiras soluções (em radianos) são

$$\lambda_1 = 4.73004, \lambda_2 = 7.85320, \lambda_3 = 10.99561, \lambda_4 = 14.13717, \quad (2.57)$$

que resulta nas seguintes frequências naturais de vibração

$$\begin{aligned} \omega_1 &\approx \sqrt{501 \frac{EI}{L^4 m} + \frac{k}{m}}, \quad \omega_2 \approx \sqrt{3804 \frac{EI}{L^4 m} + \frac{k}{m}}, \\ \omega_3 &\approx \sqrt{14618 \frac{EI}{L^4 m} + \frac{k}{m}}, \quad \omega_4 \approx \sqrt{39944 \frac{EI}{L^4 m} + \frac{k}{m}}. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Quando comparadas com os resultados obtidos em (2.52), verifica-se que as frequências naturais de vibração para uma viga bi-apoiada são inferiores às de uma viga bi-encastada. Isto deve-se à maior restrição de deformações imposta a esta última, o que provoca uma vibração mais rápida mas, regra geral, com menor amplitude.

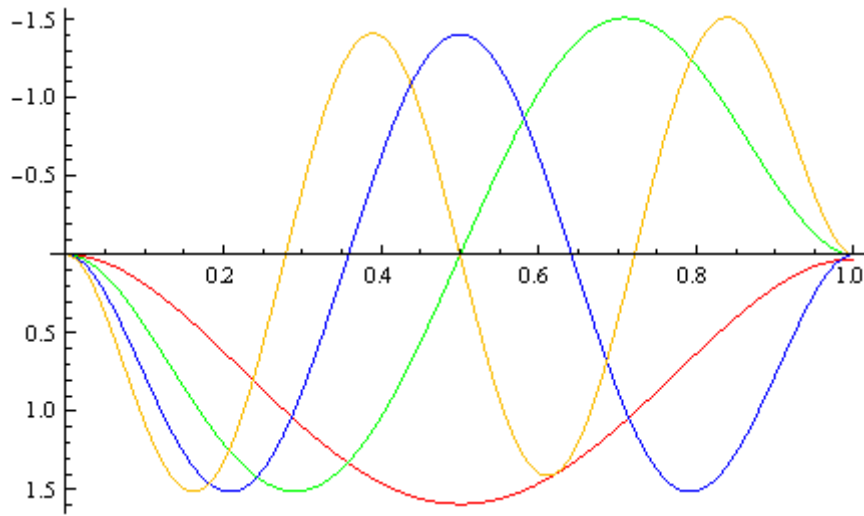
Para obter a expressão do modo de vibração correspondente a cada uma das frequências naturais não amortecidas, basta resolver o sistema de equações em ordem a uma das constantes de integração:

$$\begin{aligned} \begin{cases} A = -C \\ B = -D \end{cases} &\Rightarrow C(\cos(\lambda) - \cosh(\lambda)) + D(\sin(\lambda) - \sinh(\lambda)) = 0 \\ &\Leftrightarrow C = -D \frac{\sin(\lambda) - \sinh(\lambda)}{\cos(\lambda) - \cosh(\lambda)} \Rightarrow A = D \frac{\sin(\lambda) - \sinh(\lambda)}{\cos(\lambda) - \cosh(\lambda)}. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Substituindo na equação (2.24) e arbitrando novamente D unitário, obtém-se o modo de vibração em função de  $\lambda_i$ ,

$$v_i(x) = \frac{\sin(\lambda_i) - \sinh(\lambda_i)}{\cos(\lambda_i) - \cosh(\lambda_i)} (\cosh(\lambda_i x/L) - \cos(\lambda_i x/L)) - \sinh(\lambda_i x/L) + \sin(\lambda_i x/L). \quad (2.60)$$

Pode-se observar a representação gráfica dos primeiros quatro modos na figura 2.6. Mais uma vez obteve-se um conjunto de soluções que verificam as condições de apoio especificadas. De notar que embora a amplitude das funções apresentadas seja superior à da figura 2.3, será a determinação da constante de integração que determinará a amplitude real do movimento.



**Figura 2.6** • Representação gráfica dos quatro primeiros modos de vibração da viga bi-encastada, a vermelho, verde, azul e amarelo, respectivamente, para L unitário

### Viga encastrada/apoiada

Passando então para o um terceiro caso, o da viga encastrada/apoiada, é possível reaproveitar as condições de fronteira empregues nos dois casos anteriores, nomeadamente as equações (2.43), (2.44), (2.45) e (2.55), considerando que o apoio simples se localiza em  $x = 0$  e o encastramento em  $x = L$ .

Simplificando as expressões (o que passa por concluir que  $A = C = 0$ , como no caso bi-apoiado), colocando na forma matricial e fazendo o determinante, tem-se

$$\begin{vmatrix} \sinh(\lambda) & \sin(\lambda) \\ \cosh(\lambda) & \cos(\lambda) \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \sinh(\lambda) \cos(\lambda) - \cosh(\lambda) \sin(\lambda) = 0. \quad (2.61)$$

Passa-se à obtenção das soluções numericamente,

$$\lambda_1 = 3.92660, \quad \lambda_2 = 7.06858, \quad \lambda_3 = 10.21018, \quad \lambda_4 = 13.35177, \quad (2.62)$$

que conduzem às quatro primeiras frequências naturais de vibração não amortecida,

$$\begin{aligned} \omega_1 &\approx \sqrt{238 \frac{EI}{L^4 m} + \frac{k}{m}}, & \omega_2 &\approx \sqrt{2496 \frac{EI}{L^4 m} + \frac{k}{m}}, \\ \omega_3 &\approx \sqrt{10868 \frac{EI}{L^4 m} + \frac{k}{m}}, & \omega_4 &\approx \sqrt{31780 \frac{EI}{L^4 m} + \frac{k}{m}}. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Verifica-se que estas tomam um valor entre as da viga bi-apoiada e as da bi-encastada, visto a viga encastrada/apoiada ser um caso intermédio.

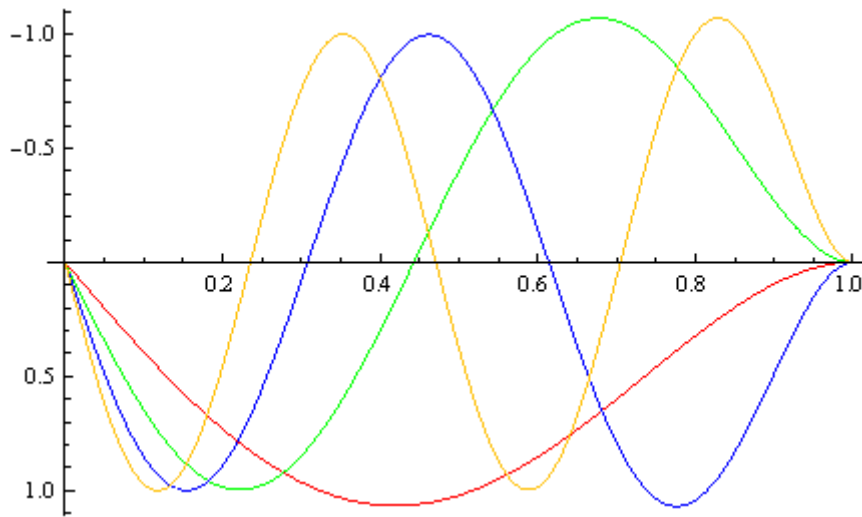
Resolvendo as restantes equações em ordem à constante de integração D, vem que

$$B = -D \frac{\sin(\lambda)}{\sinh(\lambda)}, \quad (2.64)$$

portanto, assumindo D unitário, o modo de vibração é dado por

$$v_i(x) = \sin(\lambda_i x/L) - \frac{\sin(\lambda_i)}{\sinh(\lambda_i)} \sinh(\lambda_i x/L), \quad (2.65)$$

e está representado na figura 2.7 para valores de  $i$  de 1 a 4.



**Figura 2.7** • Representação gráfica dos quatro primeiros modos de vibração da viga encastrada/apoiada, a vermelho, verde, azul e amarelo, respectivamente, para L unitário

### Viga em consola

Passando então para o caso da consola, voltam-se a reaproveitar as condições de fronteira já definidas, com adição de uma. Se considerarmos que a viga está encastrada em  $x = 0$  e livre em  $x = L$ , vem

$$y(0,t) = 0, \quad y'(0,t) = 0, \quad M(L,t) = 0, \quad V(L,t) = 0. \quad (2.66)$$

Mantêm-se então as equações (2.43), (2.46) e (2.54), e tendo em conta (2.3) e (2.5) adiciona-se a seguinte condição

$$v'''(L) = 0 \Leftrightarrow \frac{\lambda^3}{L^3} (A \sinh(\lambda) + B \cosh(\lambda) + C \sin(\lambda) - D \cos(\lambda)) = 0. \quad (2.67)$$

Simplificando as equações verifica-se que  $A = -C$  e  $B = -D$ . Colocando as restantes equações na sua forma matricial, pode-se obter o seu determinante e igualá-lo a zero, vindo assim

$$\begin{vmatrix} -\cosh(\lambda) - \cos(\lambda) & -\sinh(\lambda) - \sin(\lambda) \\ -\sinh(\lambda) + \sin(\lambda) & -\cosh(\lambda) - \cos(\lambda) \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2 + 2\cosh(\lambda)\cos(\lambda) = 0, \quad (2.68)$$

cujas soluções, obtidas numericamente, são

$$\lambda_1 = 1.87510, \quad \lambda_2 = 4.69409, \quad \lambda_3 = 7.85476, \quad \lambda_4 = 10.99554. \quad (2.69)$$

Obtêm-se assim as seguintes frequências naturais de vibração não amortecida:

$$\begin{aligned} \omega_1 &\approx \sqrt{12 \frac{EI}{L^4 m} + \frac{k}{m}}, \quad \omega_2 \approx \sqrt{486 \frac{EI}{L^4 m} + \frac{k}{m}}, \\ \omega_3 &\approx \sqrt{3807 \frac{EI}{L^4 m} + \frac{k}{m}}, \quad \omega_4 \approx \sqrt{14617 \frac{EI}{L^4 m} + \frac{k}{m}}. \end{aligned} \quad (2.70)$$

As frequências naturais de vibração não amortecida da viga em consola são as mais baixas de todas as obtidas até agora, devido à grande liberdade de movimento que esta apresenta.

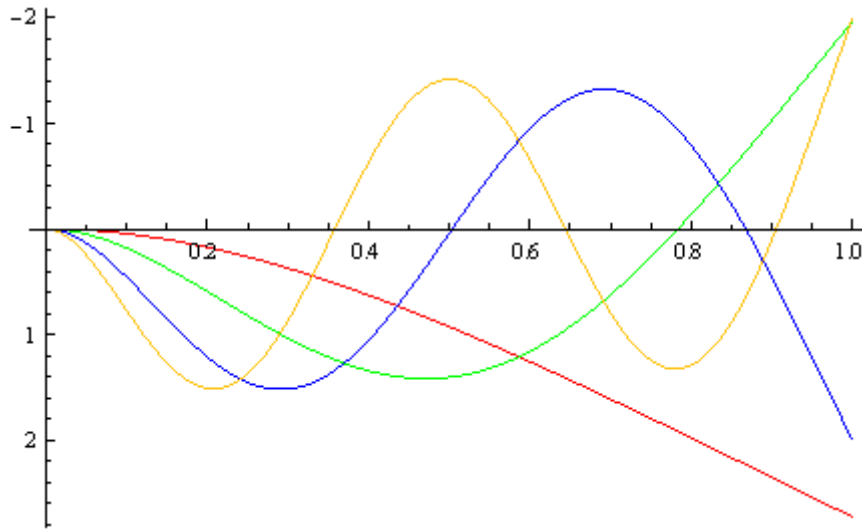
Resolvendo as restantes equações em ordem à constante de integração  $D$ , tem-se

$$A = D \frac{\sinh(\lambda) + \sin(\lambda)}{\cosh(\lambda) + \cos(\lambda)}, \quad B = -D, \quad C = -D \frac{\sinh(\lambda) + \sin(\lambda)}{\cosh(\lambda) + \cos(\lambda)}, \quad (2.71)$$

vindo assim, para  $D$  unitário, o seguinte modo de vibração

$$v_i(x) = \frac{\sinh(\lambda_i) + \sin(\lambda_i)}{\cosh(\lambda_i) + \cos(\lambda_i)} (\cosh(\lambda_i x/L) - \cos(\lambda_i x/L)) - \sinh(\lambda_i x/L) + \sin(\lambda_i x/L). \quad (2.72)$$

A figura 2.8 mostra a configuração deformada para os primeiros quatro modos de vibração da viga em consola. Pode-se facilmente observar que a translação e rotação estão impedidas na extremidade  $x = 0$ , enquanto que a extremidade  $x = L$  está completamente livre de se deformar.



**Figura 2.8** • Representação gráfica dos quatro primeiros modos de vibração da viga em consola, a vermelho, verde, azul e amarelo, respectivamente, para L unitário

### Viga com um apoio simples

O próximo passo lógico será estudar a viga com um único apoio simples, semelhante ao anterior mas a condição (2.54) é substituída por (2.45). Uma vez que isto implica que  $A = C = 0$ , obtém-se na forma matricial

$$\begin{vmatrix} \sinh(\lambda) & -\sin(\lambda) \\ \cosh(\lambda) & -\cos(\lambda) \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \cosh(\lambda)\sin(\lambda) + \cos(\lambda)\sinh(\lambda) = 0. \quad (2.73)$$

Tal como referido, neste caso a solução  $\lambda = 0$  é compatível com as condições de apoio, e como tal resolvendo a equação numericamente, obtêm-se as quatro primeiras soluções

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 2.36502, \quad \lambda_3 = 5.4978, \quad \lambda_4 = 8.63938, \quad (2.74)$$

sendo a primeira correspondente a uma rotação de corpo rígido em torno do apoio. As frequências naturais que lhe correspondem são

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 \approx \sqrt{31 \frac{EI}{L^4 m} + \frac{k}{m}}, \quad \omega_3 \approx \sqrt{914 \frac{EI}{L^4 m} + \frac{k}{m}}, \quad \omega_4 \approx \sqrt{5571 \frac{EI}{L^4 m} + \frac{k}{m}}. \quad (2.75)$$

Verifica-se que as frequências naturais de vibração não amortecida são ainda menores que as da viga em consola, por praticamente não introduzir restrições ao movimento, com exceção da translação em  $x = 0$ .



Neste caso é necessário aplicar as condições de fronteira em questão à equação (2.37) para assim obter o modo de vibração correspondente à primeira frequência natural:

$$\begin{cases} v(0) = 0 \Leftrightarrow C_1 = 0 \\ v''(0) = 0 \Leftrightarrow 2C_3 = 0 \Rightarrow C_3 = 0 \\ v''(L) = 0 \Leftrightarrow 6C_4 L = 0 \Rightarrow C_4 = 0 \\ v'''(L) = 0 \Leftrightarrow 6C_4 = 0 \Rightarrow C_4 = 0. \end{cases} \quad (2.76)$$

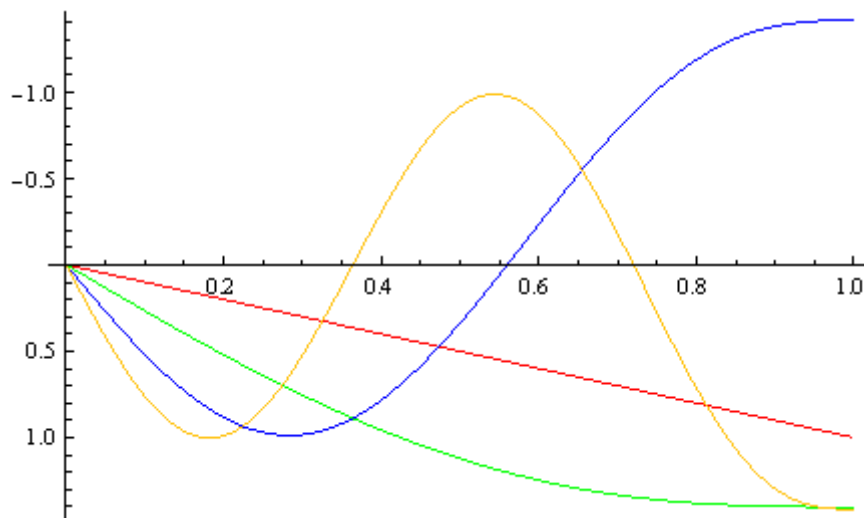
Temos então que a constante  $C_2$  é indeterminada, tal como acontece com a constante  $D$  nas soluções com  $\lambda$  não nulo:

$$B = D \frac{\sin(\lambda)}{\sinh(\lambda)}. \quad (2.77)$$

Assumindo  $C_2$  e  $D$  unitários, tem-se então que o modo de vibração é dado por

$$v_i(x) = \begin{cases} x, & i = 1 \\ \frac{\sin(\lambda_i)}{\sinh(\lambda_i)} \sinh(\lambda_i x/L) + \sin(\lambda_i x/L), & i \geq 2, \end{cases} \quad (2.78)$$

Cuja representação gráfica pode ser observada na figura 2.9, para os primeiros quatro modos.



**Figura 2.9** • Representação gráfica dos quatro primeiros modos de vibração da viga com um único apoio simples, a vermelho, verde, azul e amarelo, respectivamente, para  $L$  unitário

Verifica-se então que o primeiro modo de vibração consiste na rotação da viga em torno do apoio, sem qualquer tipo de deformação elástica.

### Viga livre

Por fim tem-se o caso em que não existe qualquer tipo de restrição de deformações nas extremidades. Mantêm-se as mesmas condições que as do caso da viga com um único apoio simples, mas substitui-se (2.43) por

$$v'''(0) = 0 \Leftrightarrow \frac{\lambda^3}{L^3} (A \sinh(0) + B \cosh(0) + C \sin(0) - D \cos(0)) = 0 \Leftrightarrow B - D = 0. \quad (2.79)$$

Colocam-se as quatro equações na forma matricial,

$$\begin{vmatrix} \cosh(\lambda) & \sinh(\lambda) & -\cos(\lambda) & -\sin(\lambda) \\ \sinh(\lambda) & \cosh(\lambda) & \sin(\lambda) & -\cos(\lambda) \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2 - 2 \cosh(\lambda) \cos(\lambda) = 0. \quad (2.80)$$

Observa-se imediatamente que a equação (2.80) é equivalente à (2.56), a equação característica da viga bi-encastada, pelo que as soluções são as mesmas apresentadas em (2.57), em adição à solução  $\lambda = 0$ :

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 4.73004, \quad \lambda_3 = 7.85320, \quad \lambda_4 = 10.99561. \quad (2.81)$$

Contudo, antes de determinar as frequências naturais de vibração, aplicam-se as condições de fronteira à equação (2.37):

$$\begin{cases} v''(0) = 0 \Leftrightarrow 2 C_3 = 0 \Rightarrow C_3 = 0 \\ v'''(0) = 0 \Leftrightarrow 6 C_4 = 0 \Rightarrow C_4 = 0 \\ v''(L) = 0 \Leftrightarrow 2 C_3 + 6 C_4 L = 0 \\ v'''(L) = 0 \Leftrightarrow 6 C_4 = 0 \Rightarrow C_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow v(x) = C_1 + C_2 x. \quad (2.82)$$

Neste caso existem então duas constantes de integração indeterminadas, mas por definição cada modo de vibração deverá ter apenas uma constante. Conclui-se assim que se tratam na verdade de dois modos de vibração, ambos associados à mesma raiz, e portanto ambos com a mesma frequência de vibração.

Tem-se então que as primeiras quatro frequências naturais de vibração são

$$\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_3 \approx \sqrt{501 \frac{EI}{L^4 m} + \frac{k}{m}}, \quad \omega_4 \approx \sqrt{3804 \frac{EI}{L^4 m} + \frac{k}{m}}, \quad (2.83)$$

Sendo a equação característica a mesma que a da viga bi-encastada, as frequências naturais de vibração não amortecida são iguais, mas deslocadas dois modos de vibração (a frequência do primeiro modo de vibração da viga bi-encastada é igual à do terceiro modo da viga livre, por exemplo). Comparando modo a modo, os valores da viga livre são inferiores até aos da viga com um único apoio simples, pois aqui nem a translação em  $x = 0$  está restringida.

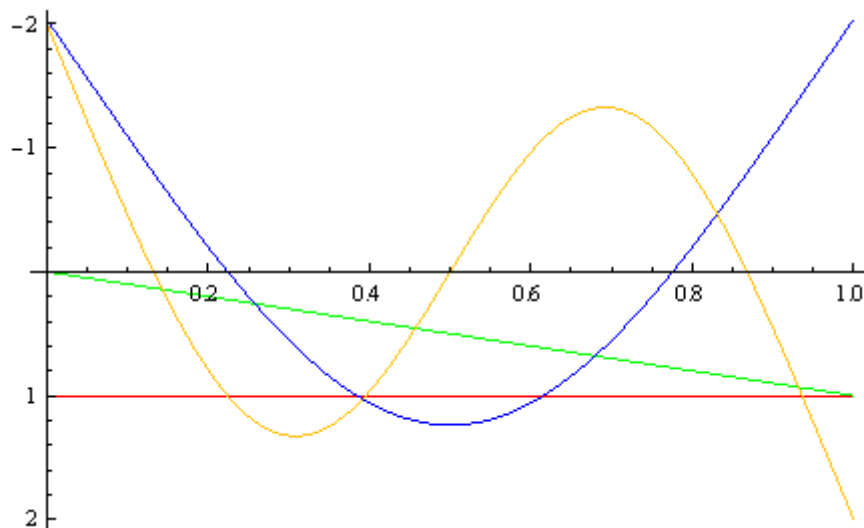
Resolvem-se as restantes equações em ordem à constante de integração D para  $\lambda$  não nulo,

$$A = C = D \frac{\sin(\lambda) - \sinh(\lambda)}{\cosh(\lambda) - \cos(\lambda)}, \quad B = D \quad \vee \quad \lambda = 0 \quad (2.84)$$

e, com  $C_1$ ,  $C_2$  e D unitários, obtém-se o seguinte modo de vibração:

$$v_i(x) = \begin{cases} 1, & i = 1 \\ x, & i = 2 \\ \frac{\sin(\lambda_i) - \sinh(\lambda_i)}{\cosh(\lambda_i) - \cos(\lambda_i)} (\cosh(\lambda_i x/L) + \cos(\lambda_i x/L)) \\ + \sinh(\lambda_i x/L) + \sin(\lambda_i x/L), & n \geq 3. \end{cases} \quad (2.85)$$

Como se pode ver ao observar a figura 2.10, em que são representados os primeiros quatro modos de vibração, os dois primeiros modos não apresentam deformações elásticas, sendo um deles a translação da viga na direcção transversal, e o outro a rotação em torno do ponto  $x = 0$ . Naturalmente que dado o facto de terem ambos a mesma frequência, podem compor um movimento de corpo rígido diferente, como a rotação em torno de qualquer outro ponto, ou rotação e translação simultânea.



**Figura 2.10** • Representação gráfica dos quatro primeiros modos de vibração da viga livre, a vermelho, verde, azul e amarelo, respectivamente, para L unitário

## 2. Vibrações transversais em vigas finitas

O quadro 2.1 resume as primeiras quatro frequências naturais de vibração não amortecida para as várias condições de apoio, da mais restringida para a mais livre.

**Quadro 2.1**

Comparação entre as primeiras quatro frequências naturais de vibração livre não amortecida para os vários sistemas estudados

Condições de apoio	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$
bi-encastada	$\sqrt{501 \frac{EI}{L^4 m} + \frac{k}{m}}$	$\sqrt{3804 \frac{EI}{L^4 m} + \frac{k}{m}}$	$\sqrt{14618 \frac{EI}{L^4 m} + \frac{k}{m}}$	$\sqrt{39944 \frac{EI}{L^4 m} + \frac{k}{m}}$
encastada/apoiada	$\sqrt{238 \frac{EI}{L^4 m} + \frac{k}{m}}$	$\sqrt{2496 \frac{EI}{L^4 m} + \frac{k}{m}}$	$\sqrt{10868 \frac{EI}{L^4 m} + \frac{k}{m}}$	$\sqrt{31780 \frac{EI}{L^4 m} + \frac{k}{m}}$
bi-apoiada	$\sqrt{97 \frac{EI}{L^4 m} + \frac{k}{m}}$	$\sqrt{1559 \frac{EI}{L^4 m} + \frac{k}{m}}$	$\sqrt{7890 \frac{EI}{L^4 m} + \frac{k}{m}}$	$\sqrt{24937 \frac{EI}{L^4 m} + \frac{k}{m}}$
consola	$\sqrt{12 \frac{EI}{L^4 m} + \frac{k}{m}}$	$\sqrt{486 \frac{EI}{L^4 m} + \frac{k}{m}}$	$\sqrt{3807 \frac{EI}{L^4 m} + \frac{k}{m}}$	$\sqrt{14617 \frac{EI}{L^4 m} + \frac{k}{m}}$
apoiada	$\sqrt{\frac{k}{m}}$	$\sqrt{31 \frac{EI}{L^4 m} + \frac{k}{m}}$	$\sqrt{914 \frac{EI}{L^4 m} + \frac{k}{m}}$	$\sqrt{5571 \frac{EI}{L^4 m} + \frac{k}{m}}$
livre	$\sqrt{\frac{k}{m}}$	$\sqrt{\frac{k}{m}}$	$\sqrt{501 \frac{EI}{L^4 m} + \frac{k}{m}}$	$\sqrt{3804 \frac{EI}{L^4 m} + \frac{k}{m}}$

É visível, para um dado número da frequência natural, o aumento desta com o grau de constrangimento. Quanto mais deslocamentos são impedidos pelas condições de apoio, maior a rigidez da estrutura, e portanto esta vibrará com uma frequência mais elevada.

Destaca-se também a presença das soluções polinomiais anteriormente referidas, em que o sistema vibra como um corpo rígido. Estas soluções correspondem às menores frequências naturais de vibração encontradas.

### 3 – Modos de vibração de uma viga descontínua

Considere-se agora uma variação da viga apresentada no sub-capítulo 2.1, em que num dado ponto  $x = L_1$ , as propriedades da viga e da fundação visco-elástica mudam abruptamente. Por simplificação, passa-se a empregar a designação de viga descontínua.

Tal como exposto na figura 3.1, os coeficientes de rigidez e de amortecimento da fundação visco-elástica à esquerda do ponto  $x = L_1$  passam a designar-se por  $k_1$  e  $c_1$ , e à sua direita,  $k_2$  e  $c_2$ , todos eles constantes. Da mesma forma, a massa e rigidez de flexão designam-se por  $m_1$  e  $EI_1$ , e  $m_2$  e  $EI_2$ , conforme se estão à esquerda ou à direita do ponto de transição, sendo constantes para cada um dos troços. Os comprimentos do primeiro e segundo troços são  $L_1$  e  $L_2$ , respectivamente. O comprimento total da viga é então  $L = L_1 + L_2$ .

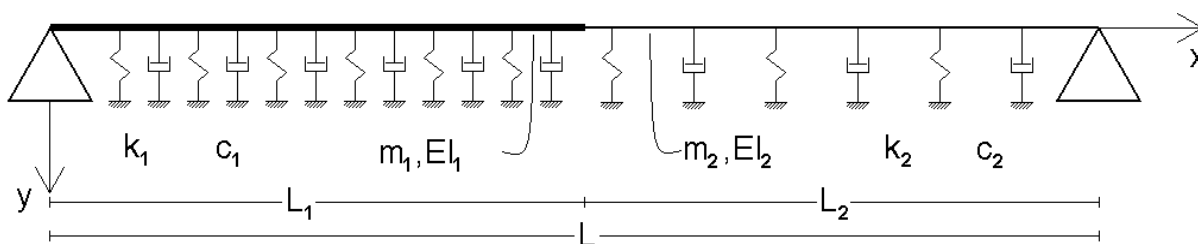


Figura 3.1 • Viga descontínua sobre uma fundação visco-elástica

O objectivo é estudar o comportamento desta viga através do método da sobreposição modal. É então necessário em primeiro lugar definir os modos de vibração livre não amortecida da estrutura e as frequências naturais correspondentes.

Neste caso concreto a solução particular (2.31) aplica-se a cada troço separadamente, visto esta ser válida apenas para uma viga com propriedades constantes ao longo de todo o seu comprimento. Como esta expressão apresenta quatro constantes de integração, ao aplicá-la a dois troços distintos obtém-se um total de oito constantes. Existem portanto oito equações que permitem resolver o problema, nomeadamente duas equações de fronteira em cada extremidade e quatro condições de continuidade em  $x = L_1$ .

Uma vez que estas oito equações conduzem a um sistema homogéneo, a equação característica do problema corresponde a igualar a zero o determinante da matriz de coeficientes desse sistema de equações.

Este sistema pode ser simplificado introduzindo as forças de fixação de forma análoga ao método dos deslocamentos. Considera-se para o efeito que os graus de liberdade são a translação e rotação no ponto de descontinuidade. Como já referido, a convenção empregue é a de deslocamento positivo para baixo. Considerando a definição de rotação como a derivada do deslocamento, a convenção é a de rotação positiva no sentido horário.

Ao determinar as forças de fixação associadas a estes dois graus de liberdade num troço e noutro está-se dentro dos critérios de aplicação da solução (2.31), pois cada um dos troços tem propriedades constantes. A aplicação das condições de fronteira faz parte do processo de determinação das forças de fixação, estando as condições de continuidade implícitas no facto de ambos os troços partilharem os mesmos dois graus de liberdade.

Este método tem a vantagem de não empregar funções de aproximação, pois como se separou a viga em troços para os quais a solução analítica é conhecida, pode-se determinar a solução exacta de cada troço e depois compatibilizar as deformações no ponto de descontinuidade.

## 3.1 – Forças de fixação

Passa-se então à determinação das forças de fixação que permitirão obter a matriz de rigidez. O procedimento é semelhante ao do método dos deslocamentos, mas em vez de se aplicarem deslocamentos unitários, aplica-se uma excitação harmónica simples de amplitude unitária em cada uma das extremidades à vez, enquanto que os restantes deslocamentos nas extremidades se mantêm nulos ou livres, conforme as condições de apoio.

Caso a excitação se trate de uma translação, pode ser expressa como

$$y(x=0,t) = \sin(\omega t), \quad (3.1)$$

ou

$$y(x=L,t) = \sin(\omega t). \quad (3.2)$$

No caso de uma rotação, ter-se-á

$$y'(x=0,t) = \sin(\omega t), \quad (3.3)$$

ou

$$y'(x=L,t) = \sin(\omega t). \quad (3.4)$$

Como se referiu, a solução particular (2.31) é composta pelo produto de uma configuração deformada por uma função harmónica simples. Assim, assumindo que a constante  $G$  da equação (2.31) é unitária, basta impor deslocamentos unitários à equação (2.24). Por exemplo:

$$y(0,t) = \sin(\omega t) \Rightarrow v(0) = 1. \quad (3.5)$$

A resolução será então feita em termos de amplitudes, obtendo-se o valor máximo das forças de fixação, cuja variação segue a mesma função harmónica que a excitação aplicada.

Estudar-se-ão de seguida dois casos, o da viga bi-encastada e o da viga encastada/apoiada. Com estes é possível compor um grande número de vigas descontínuas diferentes, com qualquer número de troços e as condições de apoio mais comuns (encastamentos e apoios).

### Viga bi-encastada

Considere-se então uma viga bi-encastada, à qual é imposta uma translação harmónica de amplitude unitária em  $x = 0$ .

As condições de fronteira podem ser expressas como:

$$v(0) = 1 \Leftrightarrow A + C = 1, \quad (3.6)$$

$$v(L) = 0 \Leftrightarrow A \cosh(\lambda) + B \sinh(\lambda) + C \cos(\lambda) + D \sin(\lambda) = 0, \quad (3.7)$$

$$v'(0) = 0 \Leftrightarrow \frac{\lambda}{L}(B + D) = 0, \quad (3.8)$$

$$v'(L) = 0 \Leftrightarrow \frac{\lambda}{L}(A \sinh(\lambda) + B \cosh(\lambda) - C \sin(\lambda/L) + D \cos(\lambda)) = 0. \quad (3.9)$$

Rescrevendo as equações (3.6) a (3.9) na forma matricial obtém-se:

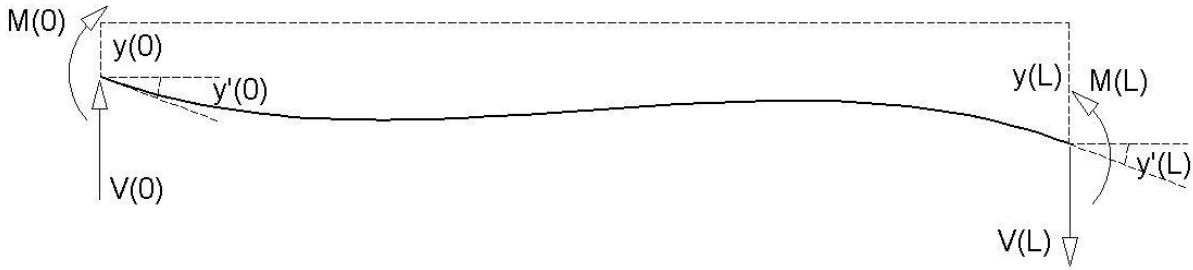
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \cosh(\lambda) & \sinh(\lambda) & \cos(\lambda) & \sin(\lambda) \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \sinh(\lambda) & \cosh(\lambda) & -\sin(\lambda) & \cos(\lambda) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \frac{1}{2 - 2\cos(\lambda)\cosh(\lambda)} \begin{bmatrix} 1 + \cos(\lambda)\cosh(\lambda) - \sin(\lambda)\sinh(\lambda) \\ \cosh(\lambda)\sin(\lambda) + \cos(\lambda)\sinh(\lambda) \\ 1 + \cos(\lambda)\cosh(\lambda) + \sin(\lambda)\sinh(\lambda) \\ -\cosh(\lambda)\sin(\lambda) - \cos(\lambda)\sinh(\lambda) \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

Substituindo as constantes na equação (2.24), à semelhança do que se fez em 2.3 para os vários casos em estudo, chega-se à configuração deformada correspondente a uma translação harmónica unitária. Tal como nos modos normais de vibração, esta expressão apenas transmite a forma geral de vibração. Será a componente que é função do tempo que traduzirá o movimento harmónico.

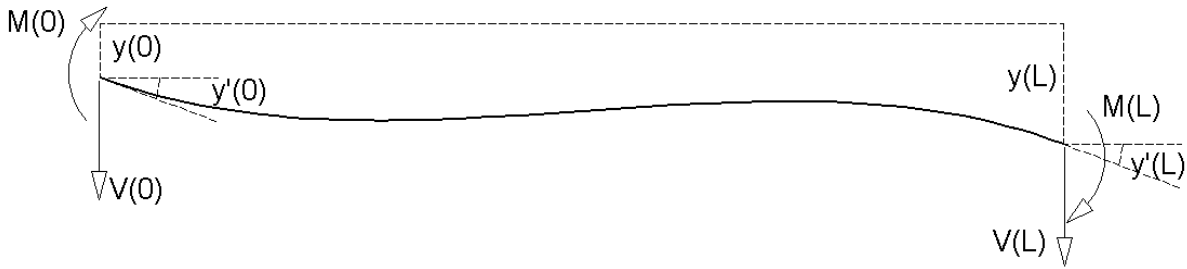
$$\begin{aligned} v(x) = & (-\cos(\lambda x/L) + \cosh(\lambda x/L)(-1 + \sin(\lambda)\sinh(\lambda)) - \sinh(\lambda)(\sin(\lambda - \lambda x/L) \\ & + \cos(\lambda)\sinh(\lambda x/L)) + \cosh(\lambda)(\cos(\lambda - \lambda x/L) \\ & + \cos(\lambda)\cosh(\lambda x/L) - \sin(\lambda)\sinh(\lambda x/L)))/2(-1 + \cos(\lambda)\cosh(\lambda)). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Tendo em conta as relações entre a deformada e os esforços internos na viga apresentadas em (2.3) e (2.5), os esforços internos seguem a convenção de sinais da resistência de materiais, representada na figura 3.2.

Para efeitos da composição da matriz de rigidez, é conveniente arbitrar que a convenção de sinais das forças de fixação coincide com a da translação e rotação, sendo os sentidos positivos mostrados na figura 3.3.



**Figura 3.2** • Convenção de sinais da resistência de materiais para os esforços internos



**Figura 3.3** • Convenção de sinais empregue para as forças de fixação

Basta apenas afectar de um sinal positivo ou negativo a expressão resultante da aplicação das relações (2.3) e (2.5) quando necessário. A amplitude das forças de fixação para a translação harmónica de amplitude unitária em  $x = 0$  vem então

$$V(0) = EI(x) v'''(x, t) = \frac{\lambda^3 EI}{L^3} \frac{\cosh(\lambda) \sin(\lambda) + \cos(\lambda) \sinh(\lambda)}{1 - \cos(\lambda) \cosh(\lambda)}, \quad (3.12)$$

$$M(0) = -EI(x) v''(x, t) = \frac{\lambda^2 EI}{L^2} \frac{\sin(\lambda) \sinh(\lambda)}{1 - \cos(\lambda) \cosh(\lambda)}, \quad (3.13)$$

$$V(L) = -EI(x) v'''(x, t) = -\frac{\lambda^3 EI}{L^3} \frac{\sin(\lambda) + \sinh(\lambda)}{1 - \cos(\lambda) \cosh(\lambda)}, \quad (3.14)$$

$$M(L) = EI(x) v''(x, t) = \frac{\lambda^2 EI}{L^2} \frac{\cosh(\lambda) - \cos(\lambda)}{1 - \cos(\lambda) \cosh(\lambda)}. \quad (3.15)$$

Naturalmente que uma translação unitária na outra extremidade ( $x = L$ ) produz as mesmas forças de fixação, trocando o valor do momento flector e esforço transverso nas extremidades, e mudando o seu sinal conforme necessário:

$$V(0) = -\frac{\lambda^3 EI}{L^3} \frac{\sin(\lambda) + \sinh(\lambda)}{1 - \cos(\lambda) \cosh(\lambda)}, \quad (3.16)$$



$$M(0) = -\frac{\lambda^2 EI}{L^2} \frac{\cosh(\lambda) - \cos(\lambda)}{1 - \cos(\lambda) \cosh(\lambda)}, \quad (3.17)$$

$$V(L) = \frac{\lambda^3 EI}{L^3} \frac{\cosh(\lambda) \sin(\lambda) + \cos(\lambda) \sinh(\lambda)}{1 - \cos(\lambda) \cosh(\lambda)}, \quad (3.18)$$

$$M(L) = -\frac{\lambda^2 EI}{L^2} \frac{\sin(\lambda) \sinh(\lambda)}{1 - \cos(\lambda) \cosh(\lambda)}. \quad (3.19)$$

Observa-se que o denominador das forças de fixação é a parcela esquerda da equação característica da viga bi-encastada, (2.56). Isto significa que quando a frequência da translação harmónica imposta é igual a qualquer uma das frequências naturais de vibração da viga, esta entrará em ressonância, e as forças de fixação necessárias para impor as condições de fronteira tenderão para infinito.

O caso da rotação harmónica de amplitude unitária em  $x = 0$  é resolvido segundo o mesmo procedimento, bastando reescrever as condições (3.6) e (3.8), obtendo-se respectivamente

$$v(0) = 0 \Leftrightarrow A + C = 0 \quad (3.20)$$

e

$$v'(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{\lambda}{L} (B + D) = 1. \quad (3.21)$$

Assim, substituindo em (3.10), tem-se

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \cosh(\lambda) & \sinh(\lambda) & \cos(\lambda) & \sin(\lambda) \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \sinh(\lambda) & \cosh(\lambda) & -\sin(\lambda) & \cos(\lambda) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L/\lambda \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \frac{L}{2\lambda - 2\lambda \cos(\lambda) \cosh(\lambda)} \begin{bmatrix} -\cosh(\lambda) \sin(\lambda) + \cos(\lambda) \sinh(\lambda) \\ 1 + \sin(\lambda) \sinh(\lambda) - \cos(\lambda) \cosh(\lambda) \\ \cosh(\lambda) \sin(\lambda) - \cos(\lambda) \sinh(\lambda) \\ 1 - \sin(\lambda) \sinh(\lambda) - \cos(\lambda) \cosh(\lambda) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Substituindo as constantes obtidas, a deformada pode ser expressa como

$$\begin{aligned} v(x) = & L \left( \cosh(\lambda) \cosh(\lambda x/L) \sin(\lambda) - \sin(\lambda x/L) - \cosh(\lambda) \sin(\lambda - \lambda x/L) \right. \\ & + \cos(\lambda - \lambda x/L) \sinh(\lambda) - \cos(\lambda) \cosh(\lambda x/L) \sinh(\lambda) \\ & \left. + (-1 + \cos(\lambda) \cosh(\lambda) - \sin(\lambda) \sinh(\lambda)) \sinh(\lambda x/L) \right) / 2\lambda (-1 + \cos(\lambda) \cosh(\lambda)). \end{aligned} \quad (3.23)$$

A amplitude das forças de fixação vem

$$V(0) = \frac{\lambda^2 EI}{L^2} \frac{\sin(\lambda) \sinh(\lambda)}{1 - \cos(\lambda) \cosh(\lambda)}, \quad (3.24)$$

$$M(0) = \frac{\lambda EI}{L} \frac{\cosh(\lambda) \sin(\lambda) - \cos(\lambda) \sinh(\lambda)}{1 - \cos(\lambda) \cosh(\lambda)}, \quad (3.25)$$

$$V(L) = \frac{\lambda^2 EI}{L^2} \frac{\cos(\lambda) - \cosh(\lambda)}{1 - \cos(\lambda) \cosh(\lambda)}, \quad (3.26)$$

$$M(L) = \frac{\lambda EI}{L} \frac{\sinh(\lambda) - \sin(\lambda)}{1 - \cos(\lambda) \cosh(\lambda)}. \quad (3.27)$$

Considerando que a rotação unitária se aplica agora na outra extremidade, trocam-se os esforços e ajustam-se os seus sinais conforme necessário, obtendo assim

$$V(0) = -\frac{\lambda^2 EI}{L^2} \frac{\cos(\lambda) - \cosh(\lambda)}{1 - \cos(\lambda) \cosh(\lambda)}, \quad (3.28)$$

$$M(0) = \frac{\lambda EI}{L} \frac{\sinh(\lambda) - \sin(\lambda)}{1 - \cos(\lambda) \cosh(\lambda)}, \quad (3.29)$$

$$V(L) = -\frac{\lambda^2 EI}{L^2} \frac{\sin(\lambda) \sinh(\lambda)}{1 - \cos(\lambda) \cosh(\lambda)}, \quad (3.30)$$

$$M(L) = \frac{\lambda EI}{L} \frac{\cosh(\lambda) \sin(\lambda) - \cos(\lambda) \sinh(\lambda)}{1 - \cos(\lambda) \cosh(\lambda)}. \quad (3.31)$$

#### **Viga encastrada/apoiada**

Considere-se agora uma viga encastrada/apoiada, sendo o encastramento em  $x = 0$  e o apoio em  $x = L$ . Para determinar as forças de fixação devido a uma translação harmónica de amplitude unitária em  $x = 0$ , substitui-se a equação (3.9) por

$$v''(L) = 0 \Leftrightarrow \frac{\lambda^2}{L^2} (A \cosh(\lambda) + B \sinh(\lambda) - C \cos(\lambda) - D \sin(\lambda)) = 0, \quad (3.32)$$

que, como já se referiu anteriormente, traduz a imposição de o momento ser nulo na extremidade  $x = L$ .

Reescrevendo (3.10), obtém-se

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \cosh(\lambda) & \sinh(\lambda) & \cos(\lambda) & \sin(\lambda) \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \cosh(\lambda) & \sinh(\lambda) & -\cos(\lambda) & -\sin(\lambda) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \frac{1}{\cosh(\lambda) \sin(\lambda) - \cos(\lambda) \sinh(\lambda)} \begin{bmatrix} -\cos(\lambda) \sinh(\lambda) \\ \cos(\lambda) \cosh(\lambda) \\ \cosh(\lambda) \sin(\lambda) \\ -\cos(\lambda) \cosh(\lambda) \end{bmatrix}, \quad (3.33)$$

Substituem-se as constantes de integração em (2.24) e conclui-se que a deformada é dada pela expressão

$$v(x) = \frac{-\cos(\lambda) \cosh(\lambda x/L) \sinh(\lambda) + \cosh(\lambda) (\sin(\lambda - \lambda x/L) + \cos(\lambda) \sinh(\lambda x/L))}{\cosh(\lambda) \sin(\lambda) - \cos(\lambda) \sinh(\lambda)}. \quad (3.34)$$

A amplitude das forças de fixação devido à excitação considerada será então

$$V(0) = \frac{\lambda^3 EI}{L^3} \frac{2 \cos(\lambda) \cosh(\lambda)}{\cosh(\lambda) \sin(\lambda) - \cos(\lambda) \sinh(\lambda)}, \quad (3.35)$$

$$M(0) = \frac{\lambda^2 EI}{L^2} \frac{\cosh(\lambda) \sin(\lambda) + \cos(\lambda) \sinh(\lambda)}{\cosh(\lambda) \sin(\lambda) - \cos(\lambda) \sinh(\lambda)}, \quad (3.36)$$

$$V(L) = \frac{\lambda^3 EI}{L^3} \frac{-\cos(\lambda) - \cosh(\lambda)}{\cosh(\lambda) \sin(\lambda) - \cos(\lambda) \sinh(\lambda)}, \quad (3.37)$$

$$M(L) = 0. \quad (3.38)$$

Se se considerar agora que o encastramento é em  $x = L$  e o apoio em  $x = 0$ , a amplitude das forças de fixação unitárias devido a uma translação harmónica em  $x = L$  pode ser obtida trocando as forças de fixação e mudando o seu sinal conforme necessário:

$$V(0) = \frac{\lambda^3 EI}{L^3} \frac{-\cos(\lambda) - \cosh(\lambda)}{\cosh(\lambda) \sin(\lambda) - \cos(\lambda) \sinh(\lambda)}, \quad (3.39)$$

$$M(0) = 0, \quad (3.40)$$

$$V(L) = \frac{\lambda^3 EI}{L^3} \frac{2 \cos(\lambda) \cosh(\lambda)}{\cosh(\lambda) \sin(\lambda) - \cos(\lambda) \sinh(\lambda)}, \quad (3.41)$$

$$M(L) = -\frac{\lambda^2 EI}{L^2} \frac{\cosh(\lambda) \sin(\lambda) + \cos(\lambda) \sinh(\lambda)}{\cosh(\lambda) \sin(\lambda) - \cos(\lambda) \sinh(\lambda)}. \quad (3.42)$$

Tal como no caso da viga bi-encastada, o denominador é a parcela esquerda da equação característica da viga em estudo, neste caso a viga encastada/apoiada, como definido em (2.61).

Considerando novamente que o encastamento se encontra em  $x = 0$ , impõe-se agora uma rotação harmónica de amplitude unitária nesse ponto. Reescreve-se então (3.22) substituindo a quarta linha pela condição (3.32), ou seja

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \cosh(\lambda) & \sinh(\lambda) & \cos(\lambda) & \sin(\lambda) \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \cosh(\lambda) & \sinh(\lambda) & -\cos(\lambda) & -\sin(\lambda) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L/\lambda \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \quad (3.43)$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \frac{L}{\lambda \cosh(\lambda) \sin(\lambda) - \lambda \cos(\lambda) \sinh(\lambda)} \begin{bmatrix} -\sin(\lambda) \sinh(\lambda) \\ \cosh(\lambda) \sin(\lambda) \\ \sin(\lambda) \sinh(\lambda) \\ -\cos(\lambda) \sinh(\lambda) \end{bmatrix}.$$

A expressão da deformada será então

$$v(x) = L \left( (-\cosh(\lambda x/L) \sin(\lambda) + \sin(\lambda - \lambda x/L)) \sinh(\lambda) + \cosh(\lambda) \sin(\lambda) \sinh(\lambda x/L) \right) / \lambda (\cosh(\lambda) \sin(\lambda) - \cos(\lambda) \sinh(\lambda)). \quad (3.44)$$

Aplicando as já referidas relações da resistência dos materiais, a amplitude das forças de fixação correspondentes à rotação harmónica em  $x = 0$  é

$$V(0) = \frac{\lambda^2 EI}{L^2} \frac{\cosh(\lambda) \sin(\lambda) + \cos(\lambda) \sinh(\lambda)}{\cosh(\lambda) \sin(\lambda) - \cos(\lambda) \sinh(\lambda)}, \quad (3.45)$$

$$M(0) = \frac{\lambda EI}{L} \frac{2 \sin(\lambda) \sinh(\lambda)}{\cosh(\lambda) \sin(\lambda) - \cos(\lambda) \sinh(\lambda)}, \quad (3.46)$$

$$V(L) = -\frac{\lambda^2 EI}{L^2} \frac{\sin(\lambda) + \sinh(\lambda)}{\cosh(\lambda) \sin(\lambda) - \cos(\lambda) \sinh(\lambda)}, \quad (3.47)$$

$$M(L) = 0. \quad (3.48)$$

Da mesma forma, ao considerar que o encastramento se encontra em  $x = L$  e lá é aplicada a rotação harmónica, trocam-se as forças de fixação da esquerda com as da direita, e afecta-se o seu sinal, para obter assim

$$V(0) = \frac{\lambda^2 EI}{L^2} \frac{\sin(\lambda) + \sinh(\lambda)}{\cosh(\lambda) \sin(\lambda) - \cos(\lambda) \sinh(\lambda)}, \quad (3.49)$$

$$M(0) = 0, \quad (3.50)$$

$$V(L) = -\frac{\lambda^2 EI}{L^2} \frac{\cosh(\lambda) \sin(\lambda) + \cos(\lambda) \sinh(\lambda)}{\cosh(\lambda) \sin(\lambda) - \cos(\lambda) \sinh(\lambda)}, \quad (3.51)$$

$$M(L) = \frac{\lambda EI}{L} \frac{2 \sin(\lambda) \sinh(\lambda)}{\cosh(\lambda) \sin(\lambda) - \cos(\lambda) \sinh(\lambda)}. \quad (3.52)$$

Utilizando estas expressões é possível determinar a matriz de rigidez da viga descontínua em estudo para vários graus de liberdade e condições de apoio diferentes.

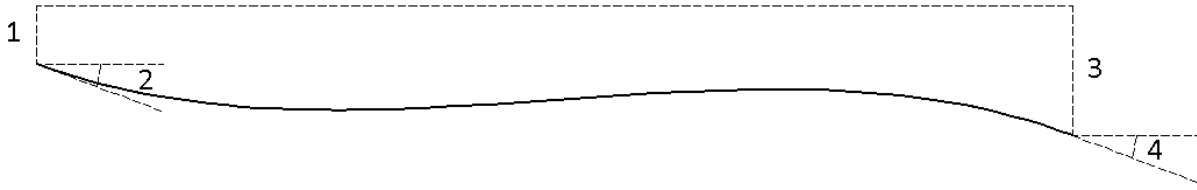
### 3.2 – Matriz de rigidez

Retome-se agora a viga introduzida ao início da secção 3, que como se viu é composta por dois troços diferentes, um de comprimento  $L_1$  e o outro de comprimento  $L_2 = L - L_1$ , e cujas propriedades mecânicas são, respectivamente,  $m_1$ ,  $EI_1$ ,  $k_1$ ,  $c_1$  e  $m_2$ ,  $EI_2$ ,  $k_2$ ,  $c_2$ . Uma vez que as propriedades são diferentes, a constante  $\lambda$  também é diferente nos dois troços, sendo  $\lambda_1$  referente ao primeiro troço e  $\lambda_2$  ao segundo.

Considerando então que esta é bi-encastrada, ou seja, o primeiro troço tem um encastramento em  $x = 0$  e o segundo em  $x = L_2$  (ou  $x = L_1 + L_2 = L$ , caso consideremos um referencial global para ambos os troços), determinar-se-á a sua matriz de rigidez.

Como já foi referido, o caso em estudo apresenta dois graus de liberdade globais, translação e rotação no ponto de descontinuidade, optando-se aqui por empregar a nomenclatura habitual no método dos deslocamentos, que se apresenta na figura 3.4

Assim, a translação no ponto  $x = L_1$  corresponde ao 3º grau de liberdade do primeiro troço, e ao 1º grau de liberdade do segundo troço, enquanto que a rotação nesse mesmo ponto corresponde ao 4º grau de liberdade do primeiro troço e ao 2º grau de liberdade do segundo troço.



**Figura 3.4** • Graus de liberdade de uma viga genérica

Ao aplicar uma translação harmónica de amplitude unitária em  $x = L_1$ , obtêm-se a seguinte amplitude das forças de fixação no ponto em questão, tendo em conta que o primeiro índice inferior designa a viga e o segundo o grau de liberdade excitado:

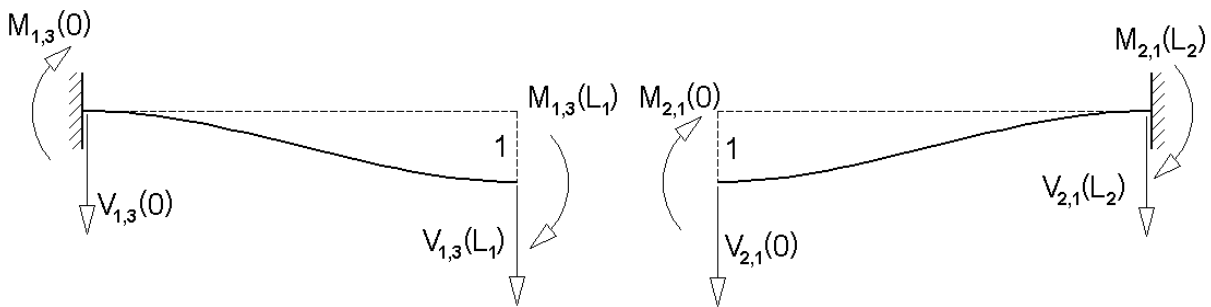
$$V_{1,3}(L_1) = \frac{\lambda_1^3 EI_1}{L_1^3} \frac{\cosh(\lambda_1) \sin(\lambda_1) + \cos(\lambda_1) \sinh(\lambda_1)}{1 - \cos(\lambda_1) \cosh(\lambda_1)}, \quad (3.53)$$

$$M_{1,3}(L_1) = -\frac{\lambda_1^2 EI_1}{L_1^2} \frac{\sin(\lambda_1) \sinh(\lambda_1)}{1 - \cos(\lambda_1) \cosh(\lambda_1)}, \quad (3.54)$$

$$V_{2,1}(0) = \frac{\lambda_2^3 EI_2}{L_2^3} \frac{\cosh(\lambda_2) \sin(\lambda_2) + \cos(\lambda_2) \sinh(\lambda_2)}{1 - \cos(\lambda_2) \cosh(\lambda_2)}, \quad (3.55)$$

$$M_{2,1}(0) = \frac{\lambda_2^2 EI_2}{L_2^2} \frac{\sin(\lambda_2) \sinh(\lambda_2)}{1 - \cos(\lambda_2) \cosh(\lambda_2)}. \quad (3.56)$$

O sentido destas forças de fixação está representado na figura 3.5.



**Figura 3.5** • Forças de fixação para uma translação unitária em  $x = L_1$

Da mesma forma, ao aplicar uma rotação harmónica de amplitude unitária em  $x = L_1$ , a amplitude das forças que têm que ser aplicadas para o manter nessa posição são

$$V_{1,4}(L_1) = -\frac{\lambda_1^2 EI_1}{L_1^2} \frac{\sin(\lambda_1) \sinh(\lambda_1)}{1 - \cos(\lambda_1) \cosh(\lambda_1)}, \quad (3.57)$$

$$M_{1,4}(L_1) = \frac{\lambda_1 EI_1}{L_1} \frac{\cosh(\lambda_1) \sin(\lambda_1) - \cos(\lambda_1) \sinh(\lambda_1)}{1 - \cos(\lambda_1) \cosh(\lambda_1)}, \quad (3.58)$$

$$V_{2,2}(0) = \frac{\lambda_2^2 EI_2}{L_2^2} \frac{\sin(\lambda_2) \sinh(\lambda_2)}{1 - \cos(\lambda_2) \cosh(\lambda_2)}, \quad (3.59)$$

$$M_{2,2}(0) = \frac{\lambda_2 EI_2}{L_2} \frac{\cosh(\lambda_2) \sin(\lambda_2) - \cos(\lambda_2) \sinh(\lambda_2)}{1 - \cos(\lambda_2) \cosh(\lambda_2)}. \quad (3.60)$$

Mais uma vez, apresentam-se os sentidos das forças de fixação na figura 3.6.

A matriz de rigidez associada a estes graus de liberdade é de dimensão 2, sendo os seus coeficientes

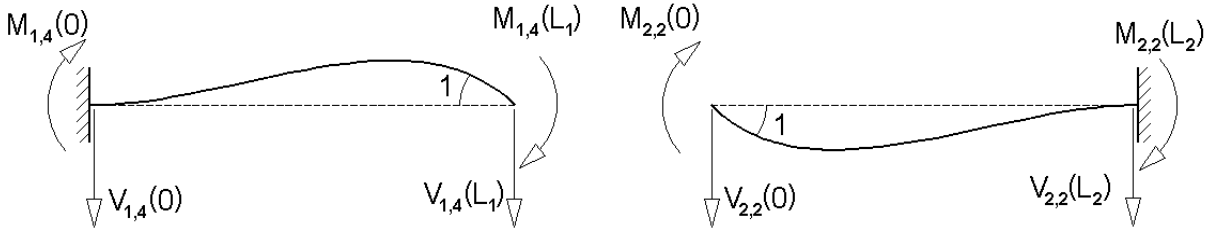
$$\begin{aligned} k_{1,1} &= 1 \times (V_{1,3}(L_1) + V_{2,1}(0)) \\ &= \frac{\lambda_1^3 EI_1}{L_1^3} \frac{\cosh(\lambda_1) \sin(\lambda_1) + \cos(\lambda_1) \sinh(\lambda_1)}{1 - \cos(\lambda_1) \cosh(\lambda_1)} \\ &\quad + \frac{\lambda_2^3 EI_2}{L_2^3} \frac{\cosh(\lambda_2) \sin(\lambda_2) + \cos(\lambda_2) \sinh(\lambda_2)}{1 - \cos(\lambda_2) \cosh(\lambda_2)}, \end{aligned} \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned} k_{2,2} &= 1 \times (M_{1,4}(L_1) + M_{2,2}(0)) \\ &= \frac{\lambda_1 EI_1}{L_1} \frac{\cosh(\lambda_1) \sin(\lambda_1) - \cos(\lambda_1) \sinh(\lambda_1)}{1 - \cos(\lambda_1) \cosh(\lambda_1)} \\ &\quad + \frac{\lambda_2 EI_2}{L_2} \frac{\cosh(\lambda_2) \sin(\lambda_2) - \cos(\lambda_2) \sinh(\lambda_2)}{1 - \cos(\lambda_2) \cosh(\lambda_2)}, \end{aligned} \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} k_{1,2} &= k_{2,1} = 1 \times (V_{1,4}(L_1) + V_{2,2}(0)) = 1 \times (M_{1,3}(L_1) + M_{2,1}(0)) \\ &= -\frac{\lambda_1^2 EI_1}{L_1^2} \frac{\sin(\lambda_1) \sinh(\lambda_1)}{1 - \cos(\lambda_1) \cosh(\lambda_1)} + \frac{\lambda_2^2 EI_2}{L_2^2} \frac{\sin(\lambda_2) \sinh(\lambda_2)}{1 - \cos(\lambda_2) \cosh(\lambda_2)}. \end{aligned} \quad (3.63)$$

A equação característica da viga será então

$$|\mathbf{K}| = 0 \Leftrightarrow k_{1,1} k_{2,2} - k_{1,2}^2 = 0 \quad (3.64)$$



**Figura 3.6** • Forças de fixação para uma rotação unitária em  $x = L_1$

Embora a expressão resultante seja demasiado extensa para apresentar na sua totalidade, ao factorizá-la obtém-se um único denominador,

$$L_1^2 L_2^2 (1 - \cos(\lambda_1) \cosh(\lambda_1))(1 - \cos(\lambda_2) \cosh(\lambda_2)). \quad (3.65)$$

Como se pode ver, neste denominador figura a parcela esquerda da equação característica de cada troço. Isto é resultado do processo de simplificação empregue ao introduzir as forças de fixação. Caso se resolvesse o problema considerando as oito condições de fronteira e continuidade, como referido em 3, ao calcular o determinante da matriz não se obteria este denominador, visto não existirem funções trigonométricas nem hiperbólicas em denominador na equação (2.24) nem nas suas derivadas.

Contudo a equação característica obtida através desse processo deve apresentar as mesmas raízes que a equação (3.64), pois só estas asseguram uma solução não trivial e dão portanto origem às frequências naturais de vibração não amortecida.

Conclui-se assim que a equação característica é equivalente a igualar o numerador do determinante da matriz de rigidez obtida a zero, e portanto as raízes da equação (3.64) são também as frequências naturais de vibração não amortecida.

Considere-se agora que a viga descontínua é bi-apoiada, passando então as forças de fixação a ser

$$V_{1,3}(L_1) = \frac{\lambda_1^3 EI_1}{L_1^3} \frac{2 \cos(\lambda_1) \cosh(\lambda_1)}{\cosh(\lambda_1) \sin(\lambda_1) - \cos(\lambda_1) \sinh(\lambda_1)}, \quad (3.66)$$

$$M_{1,3}(L_1) = -\frac{\lambda_1^2 EI_1}{L_1^2} \frac{\cosh(\lambda_1) \sin(\lambda_1) + \cos(\lambda_1) \sinh(\lambda_1)}{\cosh(\lambda_1) \sin(\lambda_1) - \cos(\lambda_1) \sinh(\lambda_1)}, \quad (3.67)$$

$$V_{2,1}(0) = \frac{\lambda_2^3 EI_2}{L_2^3} \frac{2 \cos(\lambda_2) \cosh(\lambda_2)}{\cosh(\lambda_2) \sin(\lambda_2) - \cos(\lambda_2) \sinh(\lambda_2)}, \quad (3.68)$$

$$M_{2,1}(0) = \frac{\lambda_2^2 EI_2}{L_2^2} \frac{\cosh(\lambda_2) \sin(\lambda_2) + \cos(\lambda_2) \sinh(\lambda_2)}{\cosh(\lambda_2) \sin(\lambda_2) - \cos(\lambda_2) \sinh(\lambda_2)}, \quad (3.69)$$



$$V_{1,4}(L_1) = -\frac{\lambda_1^2 EI_1}{L_1^2} \frac{\cosh(\lambda_1) \sin(\lambda_1) + \cos(\lambda_1) \sinh(\lambda_1)}{\cosh(\lambda_1) \sin(\lambda_1) - \cos(\lambda_1) \sinh(\lambda_1)}, \quad (3.70)$$

$$M_{1,4}(L_1) = \frac{\lambda_1 EI_1}{L_1} \frac{2 \sin(\lambda_1) \sinh(\lambda_1)}{\cosh(\lambda_1) \sin(\lambda_1) - \cos(\lambda_1) \sinh(\lambda_1)}, \quad (3.71)$$

$$V_{2,2}(0) = \frac{\lambda_2^2 EI_2}{L_2^2} \frac{\cosh(\lambda_2) \sin(\lambda_2) + \cos(\lambda_2) \sinh(\lambda_2)}{\cosh(\lambda_2) \sin(\lambda_2) - \cos(\lambda_2) \sinh(\lambda_2)}, \quad (3.72)$$

$$M_{2,2}(0) = \frac{\lambda_2 EI_2}{L_2} \frac{2 \sin(\lambda_2) \sinh(\lambda_2)}{\cosh(\lambda_2) \sin(\lambda_2) - \cos(\lambda_2) \sinh(\lambda_2)}, \quad (3.73)$$

Os coeficientes da matriz de rigidez serão então

$$\begin{aligned} k_{1,1} &= 1 \times (V_{1,3}(L_1) + V_{2,1}(0)) = \\ &= \frac{\lambda_1^3 EI_1}{L_1^3} \frac{2 \cos(\lambda_1) \cosh(\lambda_1)}{\cosh(\lambda_1) \sin(\lambda_1) - \cos(\lambda_1) \sinh(\lambda_1)} \\ &\quad + \frac{\lambda_2^3 EI_2}{L_2^3} \frac{2 \cos(\lambda_2) \cosh(\lambda_2)}{\cosh(\lambda_2) \sin(\lambda_2) - \cos(\lambda_2) \sinh(\lambda_2)}, \end{aligned} \quad (3.74)$$

$$\begin{aligned} k_{2,2} &= 1 \times (M_{1,4}(L_1) + M_{2,2}(0)) = \\ &= \frac{\lambda_1 EI_1}{L_1} \frac{2 \sin(\lambda_1) \sinh(\lambda_1)}{\cosh(\lambda_1) \sin(\lambda_1) - \cos(\lambda_1) \sinh(\lambda_1)} \\ &\quad + \frac{\lambda_2 EI_2}{L_2} \frac{2 \sin(\lambda_2) \sinh(\lambda_2)}{\cosh(\lambda_2) \sin(\lambda_2) - \cos(\lambda_2) \sinh(\lambda_2)}, \end{aligned} \quad (3.75)$$

$$\begin{aligned} k_{1,2} = k_{2,1} &= 1 \times (V_{1,4}(L_1) + V_{2,2}(0)) = 1 \times (M_{1,3}(L_1) + M_{2,1}(0)) \\ &= -\frac{\lambda_1^2 EI_1}{L_1^2} \frac{\cosh(\lambda_1) \sin(\lambda_1) + \cos(\lambda_1) \sinh(\lambda_1)}{\cosh(\lambda_1) \sin(\lambda_1) - \cos(\lambda_1) \sinh(\lambda_1)} \\ &\quad + \frac{\lambda_2^2 EI_2}{L_2^2} \frac{\cosh(\lambda_2) \sin(\lambda_2) + \cos(\lambda_2) \sinh(\lambda_2)}{\cosh(\lambda_2) \sin(\lambda_2) - \cos(\lambda_2) \sinh(\lambda_2)}. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Mais uma vez, factoriza-se a equação característica para concluir que o denominador é

$$L_1^2 L_2^2 (\cosh(\lambda_1) \sin(\lambda_1) - \cos(\lambda_1) \sinh(\lambda_1)) (\cosh(\lambda_2) \sin(\lambda_2) - \cos(\lambda_2) \sinh(\lambda_2)), \quad (3.77)$$

em que figura novamente a parcela esquerda da equação característica de cada uma das vigas, à semelhança do que ocorreu para a viga descontínua bi-encastada, pelo que as considerações feitas sobre a equação (3.64) também se aplicam neste caso.

## 3.3 – Frequências naturais e modos de vibração

Considere-se a viga descontínua referida em 3, definindo daqui para a frente que é simplesmente apoiada, com rigidez de flexão e massa constantes e iguais para os dois troços, sendo apenas a rigidez de fundação diferente à esquerda e à direita do ponto de descontinuidade. Considere-se ainda que a rigidez da fundação do primeiro troço (designado também por troço 1),  $k_1$ , é inferior à rigidez da fundação do segundo troço (designado também por troço 2),  $k_2$ .

Admita-se ainda que a descontinuidade encontra-se a meio da viga, dimensão que se passará a designar por  $l$ . Isto permite simplificar a equação em estudo. A seguinte expressão foi obtida aplicando ao determinante da matriz de rigidez a função *FullSimplify* do software comercial de cálculo *Mathematica*:

$$\begin{aligned} & \frac{EI^2}{l^4} \left( \cosh(\lambda_1) \left( -(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 \cosh(\lambda_2) \sin(\lambda_1) \sin(\lambda_2) \right. \right. \\ & + \left( (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^2 \cos(\lambda_2) \sin(\lambda_1) + 4\lambda_1^3 \lambda_2 \cos(\lambda_1) \sin(\lambda_2) \right) \sinh(\lambda_2) \Big) \\ & + \sinh(\lambda_1) \left( (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^2 \cos(\lambda_1) \cosh(\lambda_2) \sin(\lambda_2) \right. \\ & + \left. \left. \cos(\lambda_2) \left( -(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 \cos(\lambda_1) \sinh(\lambda_2) + 4\lambda_1 \lambda_2^3 \cosh(\lambda_2) \sin(\lambda_1) \right) \right) \right) \\ & \left. / \left( (\cosh(\lambda_1) \sin(\lambda_1) - \cos(\lambda_1) \sinh(\lambda_1)) (\cosh(\lambda_2) \sin(\lambda_2) - \cos(\lambda_2) \sinh(\lambda_2)) \right) \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Pelas razões já referidas, estudar-se-á então apenas o numerador. Além disso, as constantes  $EI$  e  $l$  em evidência em nada alteram as soluções da equação, pelo que se passa a estudar apenas

$$\begin{aligned} & \cosh(\lambda_1) \left( -(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 \cosh(\lambda_2) \sin(\lambda_1) \sin(\lambda_2) \right. \\ & + \left( (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^2 \cos(\lambda_2) \sin(\lambda_1) + 4\lambda_1^3 \lambda_2 \cos(\lambda_1) \sin(\lambda_2) \right) \sinh(\lambda_2) \Big) \\ & + \sinh(\lambda_1) \left( (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^2 \cos(\lambda_1) \cosh(\lambda_2) \sin(\lambda_2) \right. \\ & + \left. \left. \cos(\lambda_2) \left( -(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 \cos(\lambda_1) \sinh(\lambda_2) + 4\lambda_1 \lambda_2^3 \cosh(\lambda_2) \sin(\lambda_1) \right) \right) \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Como já foi referido, o parâmetro  $\lambda$  não é necessariamente real pois, dependendo das propriedades da viga e da fundação visco-elástica, o argumento da raiz quarta na expressão (2.21) pode ser negativo, o que tornaria  $\lambda$  um número imaginário.

Para facilitar o processo de determinação das raízes da equação, substitui-se então  $\lambda$  pela definição (2.30), e passa-se a ter uma equação cuja variável é  $\omega$ , a frequência natural de vibração, que já é um número real.

Naturalmente que, para cada modo de vibração, existe uma única frequência natural de vibração para toda a viga, isto é,

$$\omega = \sqrt{\frac{\lambda_1^4 EI}{l^4} + \frac{k_1}{m}} = \sqrt{\frac{\lambda_2^4 EI}{l^4} + \frac{k_2}{m}}. \quad (3.80)$$

Assim, os parâmetros  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são substituídos por

$$\lambda_1 = \sqrt[4]{\frac{m\omega^2 - k_1}{EI}} l, \quad (3.81)$$

$$\lambda_2 = \sqrt[4]{\frac{m\omega^2 - k_2}{EI}} l. \quad (3.82)$$

Não se apresenta aqui o resultado desta substituição por ser consideravelmente extenso, e não acrescentar nada de relevante à resolução. Como é natural, a variável em estudo é  $\omega$ , a frequência de vibração da estrutura, sendo as raízes de (3.79) as frequências naturais de vibração não amortecida. Os restantes valores são as propriedades mecânicas do problema.

Sendo  $k_1$  inferior a  $k_2$ , isto é, assentando o primeiro troço sobre uma fundação mais flexível que a do segundo, começa-se por verificar que  $\omega^2 = k_1 / m$  e  $\omega^2 = k_2 / m$  satisfazem a equação (3.79). Para  $\omega^2 = k_1 / m$  vem

$$\lambda_1 = \sqrt[4]{\frac{m(k_1/m) - k_1}{EI}} l = 0, \quad (3.83)$$

$$\lambda_2 = \sqrt[4]{\frac{m(k_1/m) - k_2}{EI}} l = \sqrt[4]{\frac{k_1 - k_2}{EI}} l. \quad (3.84)$$

Ao substituir estes valores na parcela esquerda da equação (3.79) rapidamente se conclui que o resultado é nulo, pelo que verifica a equação característica. Da mesma forma, ao admitir  $\omega^2 = k_2 / m$ , obtém-se

$$\lambda_1 = \sqrt[4]{\frac{m(k_2/m) - k_1}{EI}} l = \sqrt[4]{\frac{k_2 - k_1}{EI}} l, \quad (3.85)$$

$$\lambda_2 = \sqrt[4]{\frac{m(k_2/m) - k_2}{EI}} l = 0, \quad (3.86)$$

que também verificam a equação (3.79).

### 3. Modos de vibração de uma viga descontínua

---

Uma vez que  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são nulos na primeira e segunda hipótese, respectivamente, a definição da deformada apresentada em (2.24) deixa de ser válida, passando esta a ser definida pela equação polinomial (2.37). Ao aplicar as condições de fronteira obtém-se

$$v(x) = C_2 x + C_4 x^3, \quad (3.87)$$

para o primeiro troço na hipótese de  $\omega^2 = k_1 / m$ , e

$$v(x) = C_2 (x - l) + C_4 (x^3 - 3lx^2 + 2l^3). \quad (3.88)$$

para o segundo troço no caso de  $\omega^2 = k_2 / m$ .

Naturalmente que a estas deformadas diferentes das adoptadas até agora, correspondem também forças de fixação diferentes das determinadas em 3.1. Assim, é necessário recalculá-las e reescrever a matriz de rigidez (que são agora duas matrizes, uma para quando  $\lambda_1$  é nulo, e outra para quando  $\lambda_2$  é nulo).

O determinante destas novas matrizes vai ser diferente do obtido anteriormente, pelo que ao substituir  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , já não será nulo, e portanto deixam de satisfazer a equação característica.

Estando então excluídas estas duas soluções, analisa-se de seguida a equação (3.79) para valores de  $\omega^2$  compreendidos entre  $k_1 / m$  e  $k_2 / m$ . Considere-se que se define  $\omega$  neste intervalo como

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad k_1 < k < k_2. \quad (3.89)$$

Substituindo em (3.81) e (3.82) obtém-se

$$\lambda_1 = \sqrt[4]{\frac{m(k/m) - k_1}{EI}} l = \sqrt[4]{\frac{k - k_1}{EI}} l, \quad (3.90)$$

$$\lambda_2 = \sqrt[4]{\frac{m(k/m) - k_2}{EI}} l = \sqrt[4]{\frac{k - k_2}{EI}} l. \quad (3.91)$$

Atendendo ao intervalo em que  $k$  está compreendido, o parâmetro  $\lambda_1$  é um número real, uma vez que o argumento da raiz é um número positivo. Já o parâmetro  $\lambda_2$  tem como argumento da raiz um número negativo.

Aprofunde-se um pouco mais a igualdade (3.91):

$$\lambda_2 = \sqrt[4]{\frac{k - k_2}{EI}} l = \sqrt[4]{\frac{-(k_2 - k)}{EI}} l = \sqrt[4]{\frac{k_2 - k}{EI}} l \sqrt[4]{-1}. \quad (3.92)$$

Como se sabe, esta expressão corresponde a quatro soluções possíveis,

$$\lambda_2 = \sqrt[4]{\frac{k_2 - k}{EI}} l \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) = \sqrt[4]{\frac{k_2 - k}{4 EI}} l (1 + i), \quad (3.93)$$

$$\lambda_2 = \sqrt[4]{\frac{k_2 - k}{EI}} l \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) = \sqrt[4]{\frac{k_2 - k}{4 EI}} l (1 - i), \quad (3.94)$$

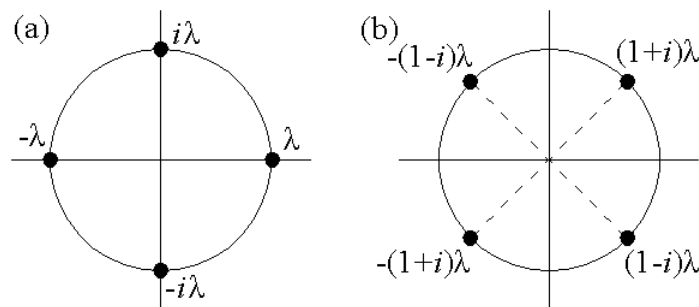
$$\lambda_2 = \sqrt[4]{\frac{k_2 - k}{EI}} l \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) = \sqrt[4]{\frac{k_2 - k}{4 EI}} l (-1 + i) \quad (3.95)$$

ou

$$\lambda_2 = \sqrt[4]{\frac{k_2 - k}{EI}} l \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) = \sqrt[4]{\frac{k_2 - k}{4 EI}} l (-1 - i). \quad (3.96)$$

Temos portanto que  $\lambda_2$  pertence ao conjunto dos números complexos.

Quando  $\lambda$  pertence aos números reais, as raízes da equação são sempre do tipo que se podem observar no círculo trigonométrico da figura 3.7 (a), mas para  $\lambda_2$  contido no intervalo em estudo serão do tipo da figura 3.7 (b).



**Figura 3.7** • Representação de raízes com componente real ou imaginária (a) e raízes com componente real e imaginária (b)

Neste último caso é possível expressar a solução de forma diferente da apresentada em (2.24), como se verá à frente no estudo do caso estático, mas pode-se manter a definição adoptada até agora, sendo os argumentos das funções trigonométricas e hiperbólicas números complexos.

Regra geral, o resultado de uma função trigonométrica com argumento complexo é também um número complexo. Verifica-se que a equação (3.79) apresentará também valores complexos no intervalo referido, mas note-se que para as frequências naturais de vibração livre não amortecida (os valores de  $\omega$  que verifiquem a equação característica), a deformada,  $v(x)$ , será real, pois uma vez que descreve uma configuração deformada da estrutura, os seus valores nunca poderão ser complexos.

### 3. Modos de vibração de uma viga descontínua

Para valores de  $k$  superiores a  $k_2$ , é evidente que tanto  $\lambda_1$  como  $\lambda_2$  são valores reais, ou seja, para qualquer  $\omega^2 > k_2 / m$ , a equação em estudo apresentará valores reais.

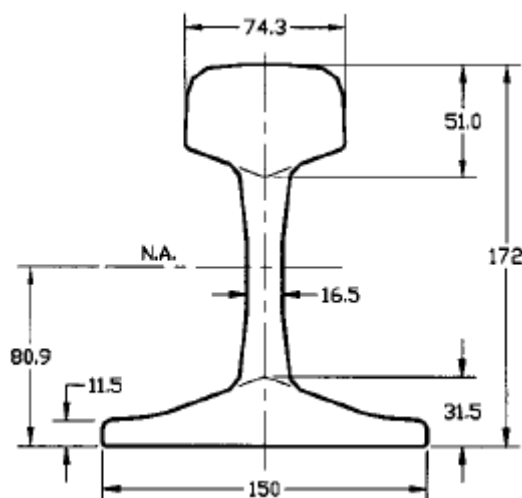
Uma vez que a expressão é demasiado complexa para estudar de forma puramente analítica, antes de prosseguir, passa-se a atribuir às propriedades físicas do problema em estudo os valores resumidos no quadro 3.1.

Estes valores representam uma via ferroviária com um comprimento de 200 metros, composta por dois carris UIC60, cuja secção transversal está representada na figura 3.8 (de acordo com as normas Europeias em vigor, ver Correia *et al.* [3]), assentes sobre uma fundação com uma mudança pronunciada na sua rigidez a meio da via.

#### Quadro 3.1

Valores numéricos das propriedades mecânicas do problema em estudo

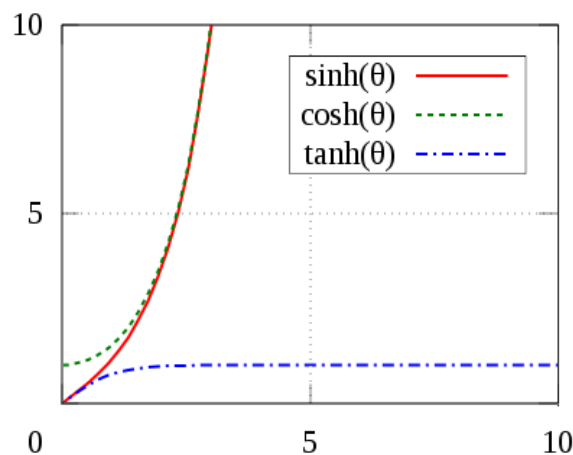
$I$ [m]	100
$E$ [GPa]	210
$I_y$ [m <sup>4</sup> ]	$6110 \cdot 10^{-8}$
$m$ [kg/m]	119.87
$k_1$ [kN/m <sup>2</sup> ]	500
$k_2$ [kN/m <sup>2</sup> ]	1000



**Figura 3.8** • Secção transversal do perfil UIC60 (unidade: mm) Chen *et al.* [2]

Ao substituir estes valores em (3.81) e (3.82), e estes últimos em (3.79), obtém-se uma equação cuja única variável é  $\omega$ , como referido anteriormente, e cujas raízes pretendemos determinar.

Mesmo estudando esta equação a nível numérico, a presença das funções hiperbólicas dificulta a sua análise, visto estas não serem limitadas superiormente. Ocorre que, para valores suficientemente elevados do argumento, a função seno hiperbólico aproxima-se cada vez mais da função cosseno hiperbólico, como se pode observar na figura 3.9.



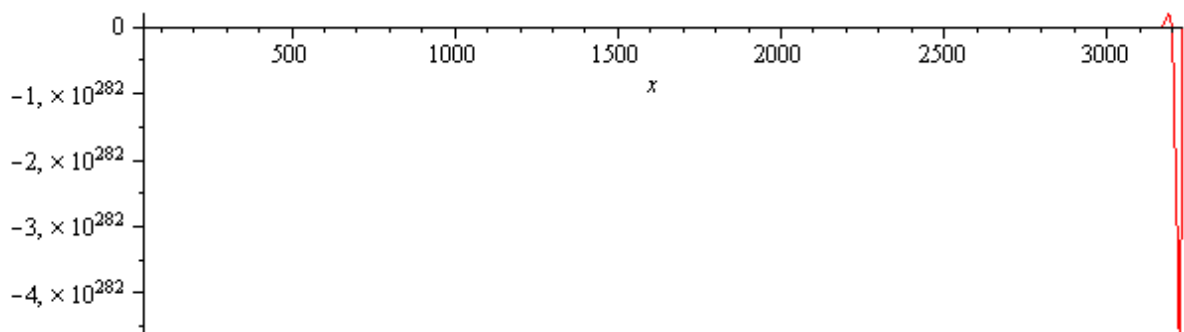
**Figura 3.9** • Funções hiperbólicas (fonte: Wikipedia)

Assim, tal como ocorreu na análise da equação (2.56) aquando do estudo das frequências naturais da viga bi-encastada, os valores da parcela esquerda da equação (3.79) tendem para valores muito elevados, mesmo para frequências relativamente baixas. Ao fim de poucas raízes os valores começam a ser demasiado grandes para a grande maioria dos processos de cálculo convencionais.

Da mesma forma, é preciso grande precisão em termos de casas decimais, pois ao operar com valores tão elevados, uma aproximação numa única casa decimal pode representar um grande erro no valor final. Este problema requer então que se empregue um maior número de casas decimais do que é habitual no campo de estudo da engenharia civil.

Poder-se-ia incluir também o denominador do determinante da matriz de rigidez, o que seria equivalente a estudar a equação (3.78), obtendo-se assim valores inferiores, desde que o denominador fosse superior à unidade, o que acontece para a grande maioria dos valores de  $\omega$ . Contudo, isto introduziria singularidades que tornam o problema mais difícil de estudar (quando o denominador se anula), e na prática não traria benefícios, pois a nível computacional o numerador e denominador são calculados separadamente e só então efectuada a divisão.

A figura 3.10 representa graficamente a parcela esquerda da equação (3.79) no intervalo em que se encontram as primeiras 200 raízes. Como se pode ver, o valor da função entre dois picos sucessivos aumenta drasticamente, de tal forma que, a esta escala, é impossível distinguir a função para valores inferiores.



**Figura 3.10** • Representação gráfica da equação (3.79) no intervalo que contém as primeiras 200 raízes

### 3. Modos de vibração de uma viga descontínua

Recorreu-se por isso ao software de cálculo comercial *Maple*, pela sua capacidade de manipular valores de elevada ordem de grandeza e número de dígitos variável. Das várias opções disponíveis, seleccionou-se a função *RootFinding[NextZero]*, que procura o zero de uma função à direita duma estimativa inicial através do desenvolvimento em série de Laurent. Não sendo o objectivo do presente texto analisar métodos matemáticos de resolução de equações, deixa-se este assunto para bibliografia mais especializada, como Matos *et al.* [9].

Ao substituir  $\omega$  por valores dentro do já referido intervalo em que  $\lambda_2$  é complexo, verifica-se que a parte imaginária não se anula, tornando-se então necessário determinar as raízes de uma equação de números complexos sem a possibilidade de recorrer a métodos analíticos.

Começa-se por estudar apenas a parte real da equação, o que resulta nas 14 raízes apresentadas no quadro 3.2 (exceptua-se, naturalmente, os limites do intervalo considerado, como já referido). A figura 3.11, por sua vez, representa a parte real da parcela esquerda da referida equação no intervalo em que  $\lambda_2$  é complexo.

#### Quadro 3.2

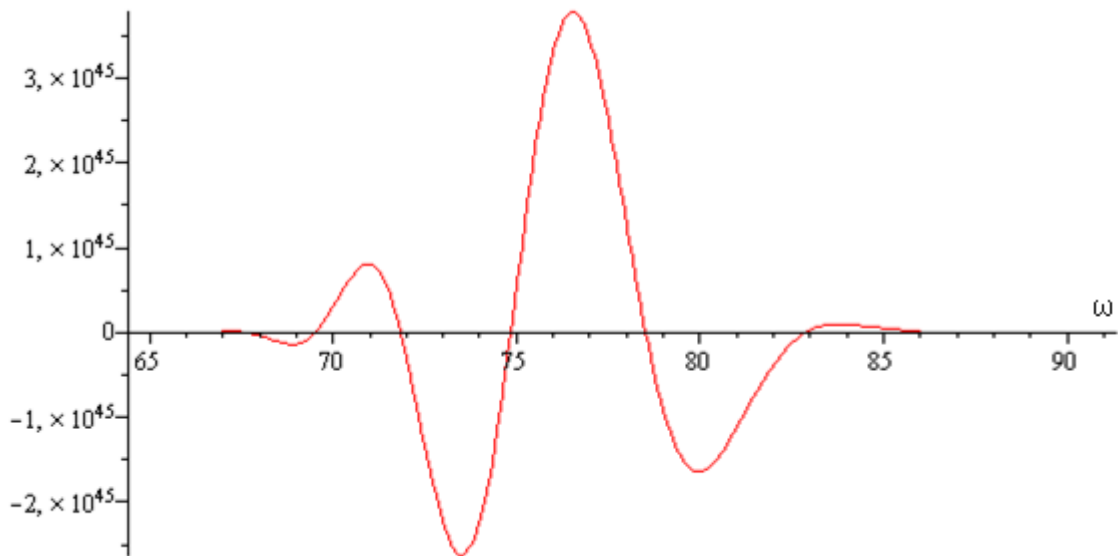
Raízes da parte real da equação característica no intervalo de  $(k_1/m)^{1/2}$  a  $(k_2/m)^{1/2}$

i	$\omega_i$ [rad/s]
1	64.58645266
2	64.60294585
3	64.66395302
4	64.81581632
5	65.12055490
6	65.65404027
7	66.50283127
8	67.75936077
9	69.51545460
10	71.85453081
11	74.84292321
12	78.51970801
13	82.87883704
14	87.79904180

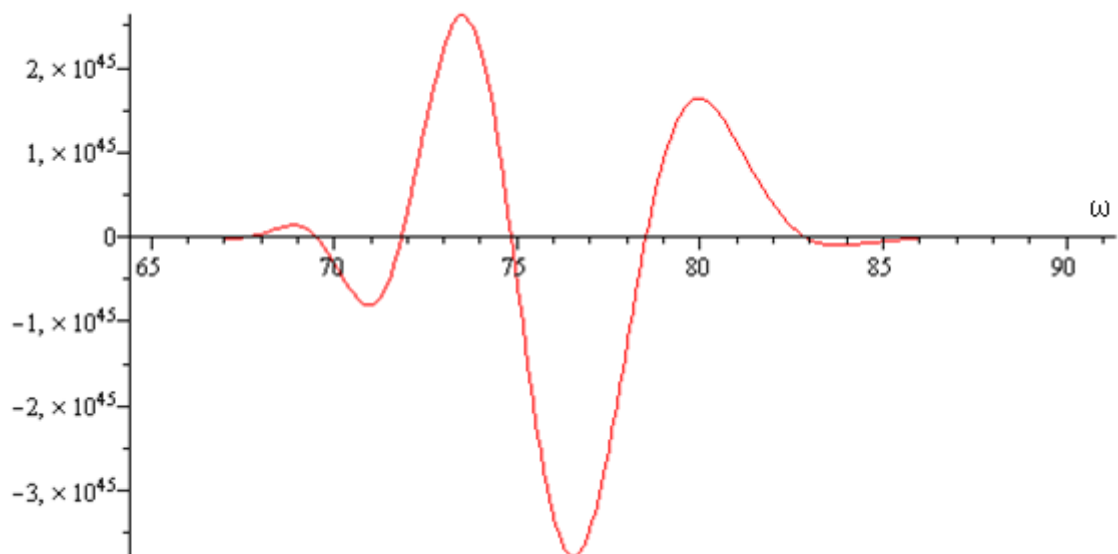
Ao estudar então apenas a parte imaginária, conclui-se que esta apresenta as mesmas raízes que a parte real, e mesmo a representação gráfica (como se pode observar na figura 3.12) é simétrica relativamente às abcissas. Conclui-se que, se as raízes da parte real e da parte imaginária são coincidentes, então são também raízes da equação (3.79).

Para valores de  $\omega^2$  superiores a  $k_2 / m$ , uma vez que a equação já toma valores reais, a determinação das raízes foi realizada por aplicação directa da função *RootFinding[NextZero]* à equação em estudo. No total obtiveram-se 500 raízes, altura a partir da qual esta função começa a ser pouco fiável devido à dificuldade computacional de aplicar o desenvolvimento em série de Laurent em pontos cuja imagem é de ordem de grandeza muito elevada.





**Figura 3.11** • Representação gráfica da parte real da parcela esquerda da equação (3.79) no intervalo de  $(k_1/m)^{1/2}$  a  $(k_2/m)^{1/2}$



**Figura 3.12** • Representação gráfica da parte imaginária da parcela esquerda da equação (3.79) no intervalo de  $(k_1/m)^{1/2}$  a  $(k_2/m)^{1/2}$

Comparem-se agora as primeiras frequências naturais obtidas com as de duas vigas bi-apoiadas de 200 metros cada, uma cuja rigidez de fundação é  $500 \text{ kN/m}^2$  ( $k_1$ ) e outra  $1\,000 \text{ kN/m}^2$  ( $k_2$ ). Todas as restantes propriedades são iguais às da viga em estudo.

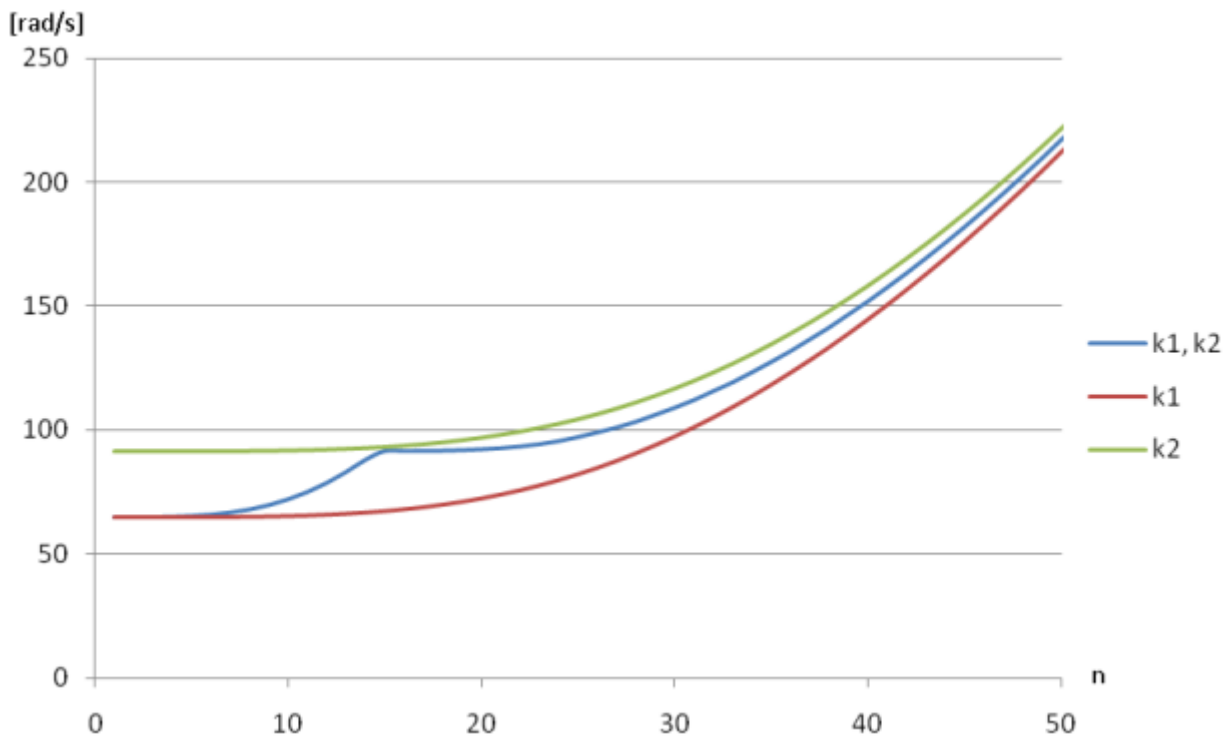
O quadro 3.3 apresenta as quinze primeiras frequências naturais cíclicas para os três casos referidos, enquanto que a figura 3.13 inclui a mesma informação para as primeiras cinquenta frequências.

### 3. Modos de vibração de uma viga descontínua

#### Quadro 3.3

Comparação entre as primeiras 15 frequências naturais cíclicas (em rad/s) da viga descontínua e das duas vigas bi-apoiadas com rigidez de fundação  $k_1$  e  $k_2$

i	$k_1$	Viga descontínua	$k_2$
1	64.58476576	64.58645266	91.33661598
2	64.58552251	64.60294585	91.33715109
3	64.58880171	64.66395302	91.33946987
4	64.59762947	64.81581632	91.34571245
5	64.61623948	65.12055490	91.35887399
6	64.65006673	65.65404027	91.38280243
7	64.70573477	66.50283127	91.42219404
8	64.79103305	67.75936077	91.48258531
9	64.91488038	69.51545460	91.57033988
10	65.08727001	71.85453081	91.69262876
11	65.31919202	74.84292321	91.85740197
12	65.62252887	78.51970801	92.07334982
13	66.00992109	82.87883704	92.34985183
14	66.49460146	87.79904180	92.69691189
15	67.09019854	91.33763360	93.12507821



**Figura 3.13** • Comparação entre as primeiras 50 frequências naturais da viga descontínua e das duas vigas bi-apoiadas com rigidez de fundação  $k_1$  e  $k_2$

Como se pode observar, o valor das frequências naturais da viga em estudo encontra-se entre os dois casos referidos, visto ser um caso intermédio, pois metade da fundação tem uma rigidez  $k_1$  e a outra metade  $k_2$ . É contudo notória a maior proximidade aos valores da viga com menor rigidez para os primeiros modos de vibração.

Ao longo do intervalo em que  $\lambda_2$  é complexo, a frequência começa por ser praticamente igual à da viga de menor rigidez de fundação, e vai aumentando até estar mais próxima da viga de maior rigidez no décimo quarto modo. Depois deste intervalo tende para um valor médio entre ambos.

Evita-se para já tecer considerações acerca deste resultado sem antes analisar os modos de vibração correspondentes a cada frequência.

Relembrando que em 2.4.2 se definiram como incógnitas a translação e rotação no ponto de descontinuidade entre as duas vigas, pode-se retomar a nomenclatura empregue no método dos deslocamentos para afirmar que:

$$\mathbf{K} \begin{Bmatrix} \delta \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} \\ k_{2,1} & k_{2,2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (3.97)$$

Este sistema de duas equações a duas incógnitas (embora exista um terceiro parâmetro, pois a matriz de rigidez é função da frequência de vibração,  $\omega$ ) consiste na equação do método dos deslocamentos na ausência de carregamento, visto ainda estarem em estudo as vibrações livres não amortecidas da estrutura.

Ao substituir na matriz de rigidez cada uma das frequências naturais de vibração livre não amortecida, obtém-se para cada uma delas um sistema de duas equações a duas incógnitas. Ainda assim, estes sistemas são todos eles indeterminados, pois as frequências de vibração que lhes deram origem foram determinadas ao forçar o determinante da matriz de rigidez a ser nulo, pelo que as equações são linearmente dependentes e portanto têm infinitas soluções.

Assim sendo, a única hipótese é arbitrar uma das variáveis e resolver uma das equações para determinar a outra variável. Obtém-se assim uma relação entre os dois, e portanto a forma geral da deformada para a frequência natural de vibração em questão. Isto está em concordância com o já discutido sobre os modos de vibração.

Neste caso optou-se por arbitrar uma translação unitária para todos os casos, e resolveram-se ambas as equações, o que resulta em dois valores de rotação ligeiramente diferentes devido à acumulação natural de erros numéricos (nos casos estudados a diferença nunca surgiu antes da vigésima primeira casa decimal). Embora este erro seja desprezável, por falta de melhor critério de selecção optou-se por considerar o valor médio de ambos os resultados.

É importante referir que desta forma não se contempla a possibilidade de a translação ser nula para alguns dos modos. É relativamente fácil verificar que no caso em estudo não existe essa possibilidade. Tendo em conta que os valores de  $\omega$  que respeitam a equação (3.79) levam a um determinante nulo da matriz de rigidez, vem

$$|\mathbf{K}| = 0 \Leftrightarrow k_{1,1}k_{2,2} - (k_{1,2})^2 = 0 \Leftrightarrow k_{1,2} = \pm \sqrt{k_{1,1}k_{2,2}}. \quad (3.98)$$

Substitui-se então na equação (3.97) e assume-se que a translação é nula para obter

$$\begin{cases} \pm \sqrt{k_{1,1}k_{2,2}}\theta = 0 \\ k_{2,2}\theta = 0 \end{cases} \Rightarrow \theta = 0 \vee k_{2,2} = 0. \quad (3.99)$$

Uma vez que a translação e rotação simultaneamente nulas corresponde a uma solução trivial, a única hipótese é o elemento da segunda linha e da segunda coluna da matriz de rigidez ser nulo. Deste facto e da equação (3.98) vem que

$$k_{1,2} = k_{2,1} = 0. \quad (3.100)$$

Atendendo à definição para os valores fora da diagonal principal apresentada em (3.76), e ao facto de ambos os troços terem o mesmo comprimento e rigidez de flexão, vem automaticamente que, para satisfazer (3.100),

$$\lambda_1^2 \frac{\cosh(\lambda_1) \sin(\lambda_1) + \cos(\lambda_1) \sinh(\lambda_1)}{\cosh(\lambda_1) \sin(\lambda_1) - \cos(\lambda_1) \sinh(\lambda_1)} = \lambda_2^2 \frac{\cosh(\lambda_2) \sin(\lambda_2) + \cos(\lambda_2) \sinh(\lambda_2)}{\cosh(\lambda_2) \sin(\lambda_2) - \cos(\lambda_2) \sinh(\lambda_2)}. \quad (3.101)$$

Embora seja possível determinar numericamente para que pares de valores de  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  é respeitada a equação (3.101), como são ambas funções da frequência natural de vibração não amortecida e das restantes propriedades mecânicas de cada troço, podem não tomar simultaneamente os valores desejados. Assim, um dado valor de  $\omega$  poder levar a que  $\lambda_1$  tome um dos valores que corresponde a um par que resolve a equação, mas não leva a que  $\lambda_2$  tome o valor correspondente ao mesmo par.

Posto isto, a única solução que verifica a equação (3.101) para qualquer valor de  $\omega$  é

$$\lambda_1 = \lambda_2. \quad (3.102)$$

Atendendo às definições (3.81) e (3.82), e dado que as restantes propriedades dos troços são iguais, a constante de Winkler de ambos tem também que ser igual. Conclui-se assim que a possibilidade de ter translação nula apenas se verificaria se ambos os troços apresentassem a mesma rigidez de fundação, e portanto arbitrar a translação como sendo unitária não irá conduzir a um sistema de equações impossível de resolver.

Para obter então a função do modo de vibração bastaria realizar a combinação linear das deformadas devido a uma translação harmónica imposta, a equação (3.34), e devido a uma rotação harmónica imposta, a (3.44), isto é:

$$v_i(x) = \delta_i v_1(x) + \theta_i v_2(x), \quad (3.103)$$

em que o índice  $i$  representa o número do modo de vibração,  $v_1$  representa a deformada da viga descontínua devido a uma translação unitária e  $v_2$  representa a deformada dessa mesma viga devido a uma rotação unitária, ambos obtidos a partir das equações acima referidas.

Contudo, verificou-se posteriormente que a forma como estão expressas as deformadas (3.34) e (3.44) conduz a uma maior acumulação de erros numéricos na solução final. Opta-se então por definir os modos de vibração substituindo na expressão (2.24) as seguintes constantes de integração:

$$A_1 = 0, \quad (3.104)$$

$$B_1 = \frac{l \theta \sin(\lambda_1) - \lambda_1 \cos(\lambda_1)}{\lambda_1 (\cosh(\lambda_1) \sin(\lambda_1) - \cos(\lambda_1) \sinh(\lambda_1))}, \quad (3.105)$$

$$C_1 = 0, \quad (3.106)$$

$$D_1 = \frac{\lambda_1 \cosh(\lambda_1) - l \theta \sinh(\lambda_1)}{\lambda_1 (\cosh(\lambda_1) \sin(\lambda_1) - \cos(\lambda_1) \sinh(\lambda_1))}, \quad (3.107)$$

$$A_2 = \frac{-\sinh(\lambda_2) (\lambda_2 \cos(\lambda_2) + l \theta \sin(\lambda_2))}{\lambda_2 (\cosh(\lambda_2) \sin(\lambda_2) - \cos(\lambda_2) \sinh(\lambda_2))}, \quad (3.108)$$

$$B_2 = \frac{\cosh(\lambda_2) (\lambda_2 \cos(\lambda_2) + l \theta \sin(\lambda_2))}{\lambda_2 (\cosh(\lambda_2) \sin(\lambda_2) - \cos(\lambda_2) \sinh(\lambda_2))}, \quad (3.109)$$

$$C_2 = \frac{\sin(\lambda_2) (\lambda_2 \cosh(\lambda_2) + l \theta \sinh(\lambda_2))}{\lambda_2 (\cosh(\lambda_2) \sin(\lambda_2) - \cos(\lambda_2) \sinh(\lambda_2))}, \quad (3.110)$$

$$D_2 = \frac{-\cos(\lambda_2) (\lambda_2 \cosh(\lambda_2) + l \theta \sinh(\lambda_2))}{\lambda_2 (\cosh(\lambda_2) \sin(\lambda_2) - \cos(\lambda_2) \sinh(\lambda_2))}, \quad (3.111)$$

em que  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  e  $D_1$  correspondem às constantes de integração numa viga encastrada/apoiada de comprimento  $l$  para uma translação unitária e uma rotação  $\theta$  em  $x = l$ , e  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$  e  $D_2$  correspondem às constantes de integração numa viga encastrada/apoiada de comprimento  $l$  para uma translação unitária e uma rotação  $\theta$  em  $x = 0$ . Estas constantes foram obtidas através do mesmo método empregue na determinação das forças de fixação, na secção 3.1.

### 3. Modos de vibração de uma viga descontínua

O modo de vibração vem então:

$$v(x) = \begin{cases} A_1 \cosh(\lambda_1 x/l) + B_1 \sinh(\lambda_1 x/l) + C_1 \cos(\lambda_1 x/l) + D_1 \sin(\lambda_1 x/l), & x \leq l \\ A_2 \cosh(\lambda_2 (x-l)/l) + B_2 \sinh(\lambda_2 (x-l)/l) \\ + C_2 \cos(\lambda_2 (x-l)/l) + D_2 \sin(\lambda_2 (x-l)/l), & x > l \end{cases} \quad (3.112)$$

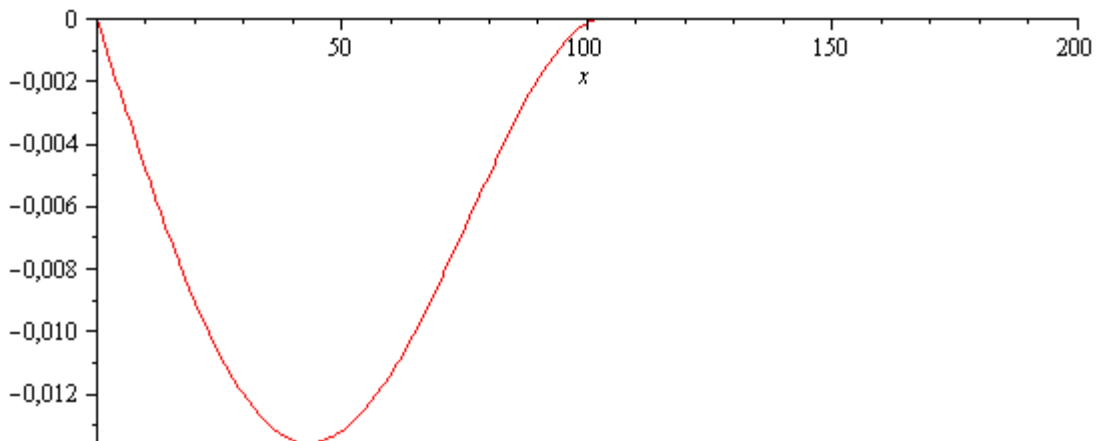
Antes de passar à representação gráfica dos modos de vibração é importante introduzir a norma empregue, uma vez que as funções de forma apresentam deslocamentos de ordens de grandeza muito diferentes de modo para modo. Seleccionou-se a norma mais frequentemente utilizada para vibrações transversais em vigas (veja-se, por exemplo, Dimitrovová *et al.* [5]), pelo que se normalizam os modos de vibração dividindo pela seguinte expressão:

$$N_i = \sqrt{\int_0^L m(v_i(x))^2 dx} = \sqrt{m \int_0^L (v_i(x))^2 dx}, \quad (3.113)$$

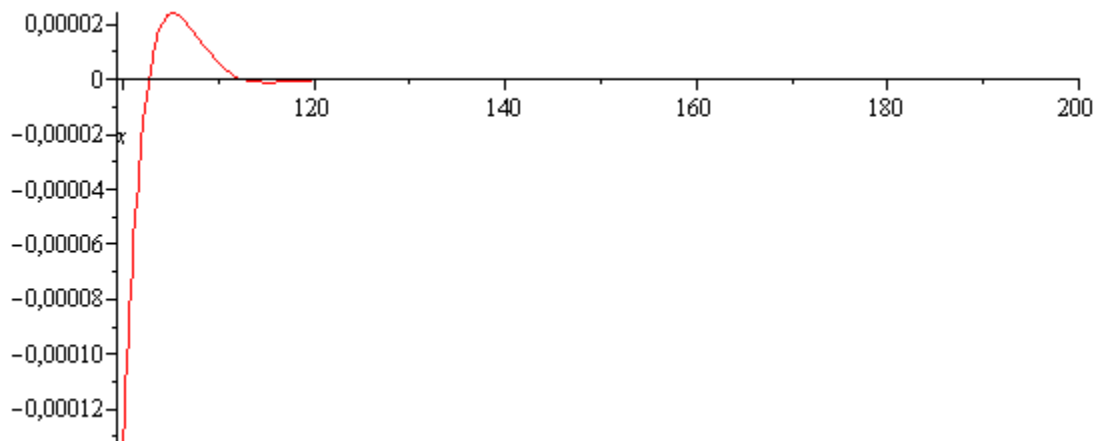
em que  $L$  é o comprimento total da viga. Daqui a diante, passa-se a considerar que a expressão  $v_i(x)$  corresponde ao  $i$ -ésimo modo de vibração livre não amortecida já normalizado, evitando-se futuras referências à norma.

No caso do primeiro modo (figura 3.14) é notório que o troço em que a rigidez de fundação é inferior é o que é mais excitado, apresentando uma deformada semelhante à de uma viga encastrada/apoiada, enquanto que o troço seguinte parece não sofrer praticamente deformações. Ao ampliar este troço verifica-se que ele sofre deformações muito baixas na vizinhança do ponto de descontinuidade, como se pode observar na figura 3.15.

Este fenómeno pode ser comparado ao do amortecimento super-crítico num oscilador de um grau de liberdade, em que este volta muito rapidamente ao ponto de equilíbrio após uma perturbação exterior. Neste caso a rigidez é tão elevada que a frequência em que a vibração ocorre não é suficiente para a vencer e assim a translação e rotação no ponto de descontinuidade praticamente não se propagam ao longo deste troço.



**Figura 3.14 •** Primeiro modo de vibração normalizado da viga descontínua



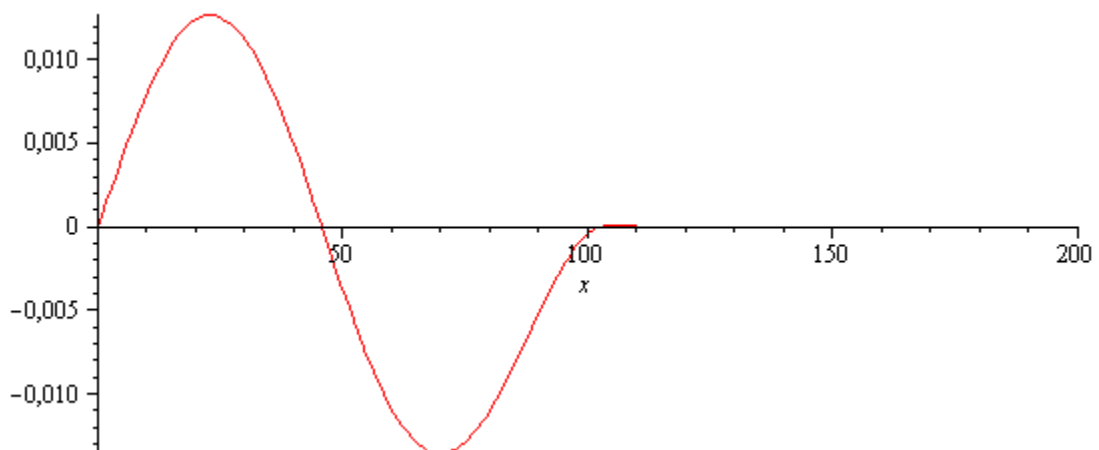
**Figura 3.15** • Primeiro modo de vibração normalizado da viga descontínua no trecho de maior rigidez

Esta diferença na deformada dos dois treços vem complementar a maior proximidade das primeiras frequências naturais de vibração da viga descontínua às da viga de menor rigidez, visto o trecho de menor rigidez estar mais envolvido nestes modos de vibração do que o trecho de maior rigidez.

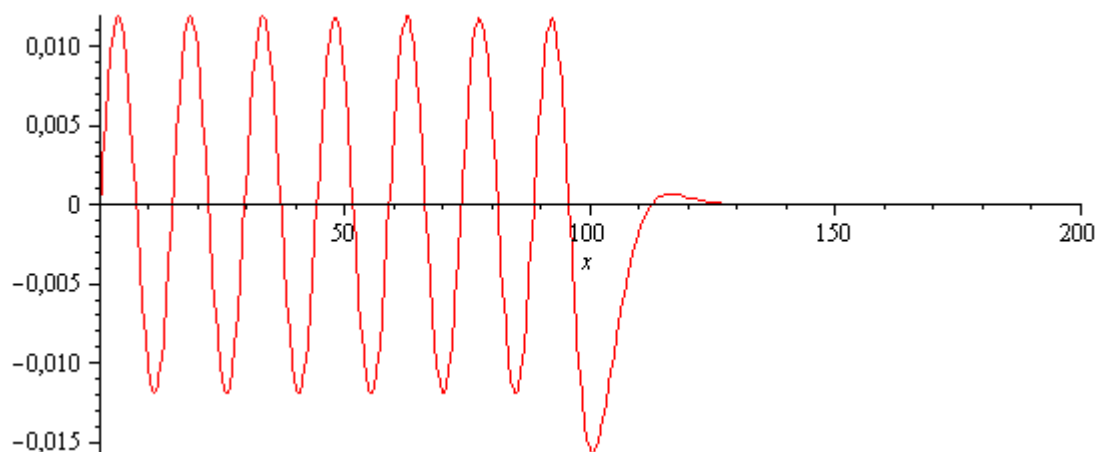
Verifica-se que este fenómeno se mantém para os primeiros catorze modos, em que a frequência de vibração é inferior à de um oscilador linear de massa  $m$  e rigidez  $k_2$ .

Por simplicidade apresentam-se apenas o segundo e décimo quarto modos normalizados, nas figuras 3.16 e 3.17, respectivamente. Estas figuras permitem observar que o número de picos na deformada é igual ao número do modo de vibração em questão (ou que o número de ondas completas é metade do número do modo de vibração). Verifica-se que esta relação é verdadeira para todos os modos de vibração observados.

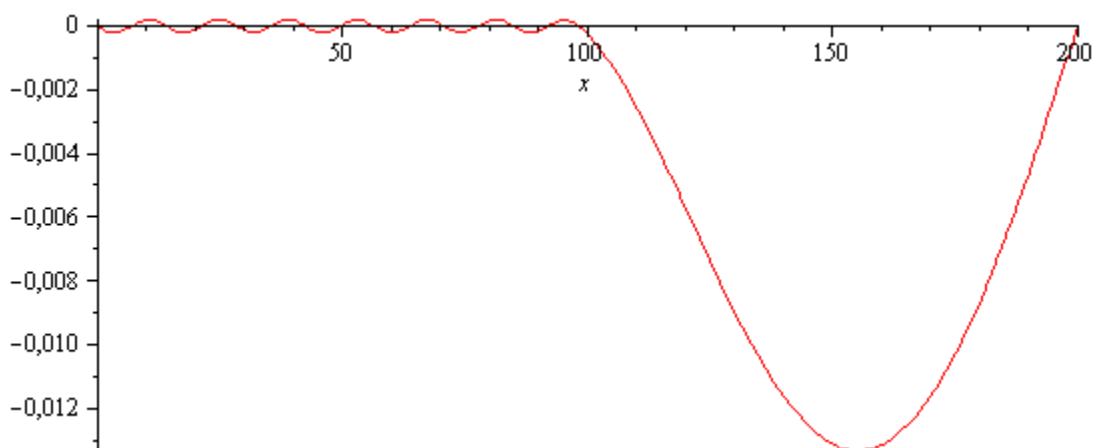
No décimo quinto modo de vibração, em que o quadrado da frequência excede  $k_2 / m$ , verifica-se a participação muito superior do trecho de maior rigidez, que apresenta uma deformada semelhante à do trecho de menor rigidez no primeiro modo de vibração, enquanto que este último mantém a mesma configuração deformada do décimo quarto modo, como se pode observar na figura 3.18.



**Figura 3.16** • Segundo modo de vibração normalizado da viga descontínua



**Figura 3.17** • Décimo quarto modo de vibração normalizado da viga descontínua



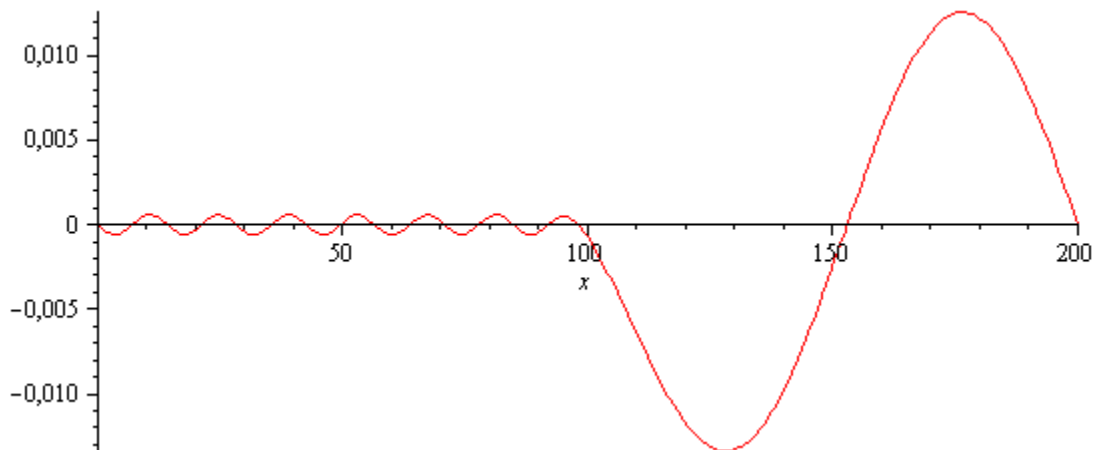
**Figura 3.18** • Décimo quinto modo de vibração normalizado da viga descontínua

Nos modos subsequentes continua a verificar-se que o troço de maior rigidez apresenta sensivelmente a mesma configuração deformada que o troço de menor rigidez para o segundo, terceiro e consecutivos modos, e este continua a apresentar a mesma configuração deformada. Verifica-se contudo que a diferença de amplitudes entre os dois troços não é tão pronunciada como no modo anterior, tornando-se esta cada vez mais parecida à medida que se avança no número do modo (ver figura 3.19).

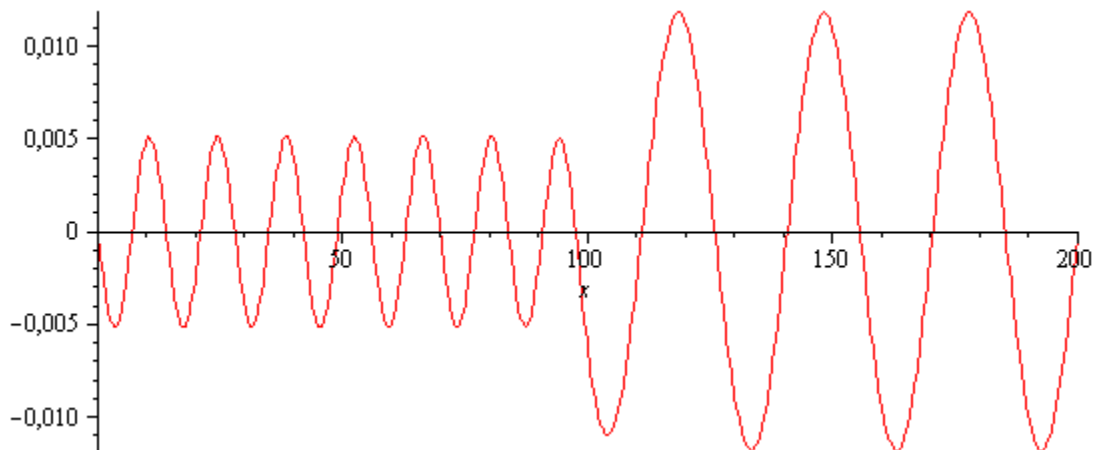
Observa-se que para o vigésimo primeiro modo de vibração começa a ser visível no troço de maior rigidez, junto ao ponto de descontinuidade, uma onda com amplitude ligeiramente inferior às das restantes do mesmo troço, como se pode observar na figura 3.20.

Para modos superiores, esta onda vai sendo cada vez menor comparativamente às restantes do troço de maior rigidez. Também se observa que a onda se vai deslocando na direcção do troço de menor rigidez, estando o seu pico do lado esquerdo da descontinuidade já para o vigésimo terceiro modo, pelo que a configuração que este mantinha desde o décimo quarto modo de vibração, em que apresentava catorze picos, é agora de quinze picos.





**Figura 3.19** • Décimo sexto modo de vibração normalizado da viga descontínua



**3.20** • Vigésimo primeiro modo de vibração normalizado da viga descontínua

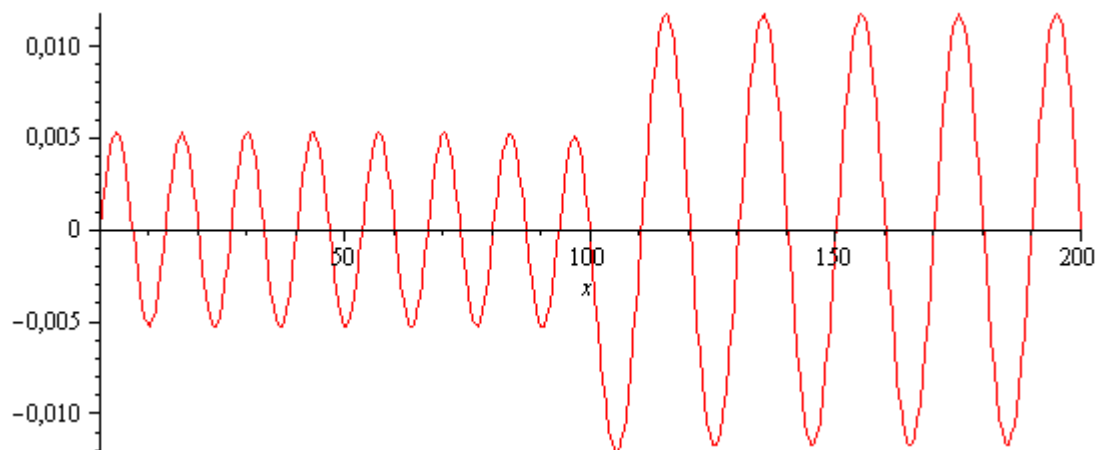
Para o vigésimo quinto modo, a onda encontra-se já completamente dentro do domínio do troço de menor rigidez. Uma vez que continua a ser válida a relação entre o número de ondas e o número do modo de vibração, o troço de maior rigidez apresenta apenas dez picos neste modo. Esta relação pode ser observada na figura 3.21.

Verifica-se que o número de picos em cada troço continua a aumentar alternadamente, mas com um maior aumento no troço de maior rigidez, até que têm ambos o mesmo número de picos no quadragésimo quarto modo de vibração, em que as amplitudes de ambos os troços são semelhantes.

A partir desse ponto o número de picos aumenta em um para cada modo, ora no troço de menor rigidez ora no troço de maior rigidez. É de notar que, dada a menor rigidez do primeiro troço, o número de picos deste é sempre maior ou igual ou maior ao do segundo troço, visto que o primeiro é mais deformável.

O quadro 3.4 resume o número de picos em cada troço para os primeiros sessenta modos de vibração.

3. Modos de vibração de uma viga descontínua



3.21 • Vigésimo quinto modo de vibração normalizado da viga descontínua

Quadro 3.4

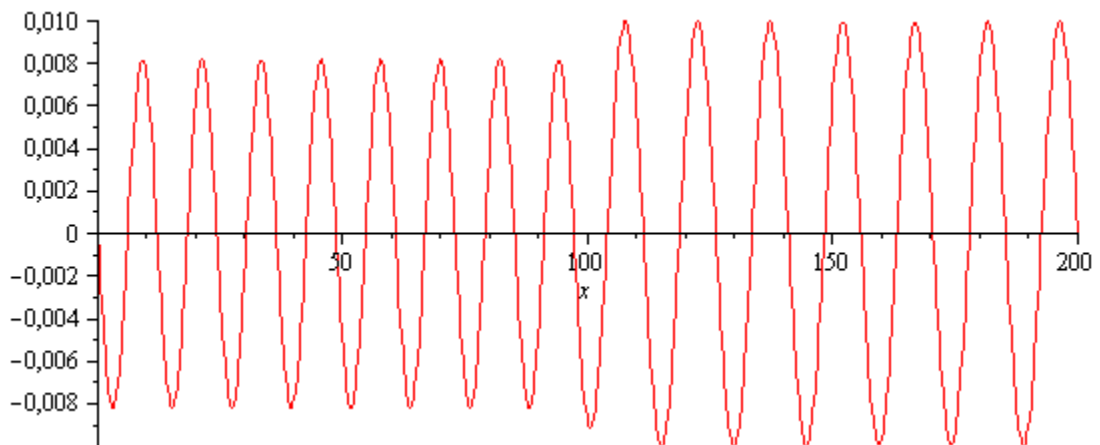
Número de picos em ambos os troços para os primeiros 60 modos naturais de vibração

$i$	$k_1$	$k_2$
1	1	0
2	2	0
3	3	0
4	4	0
5	5	0
6	6	0
7	7	0
8	8	0
9	9	0
10	10	0
11	11	0
12	12	0
13	13	0
14	14	0
15	14	1
16	14	2
17	14	3
18	14	4
19	14	5
20	14	6

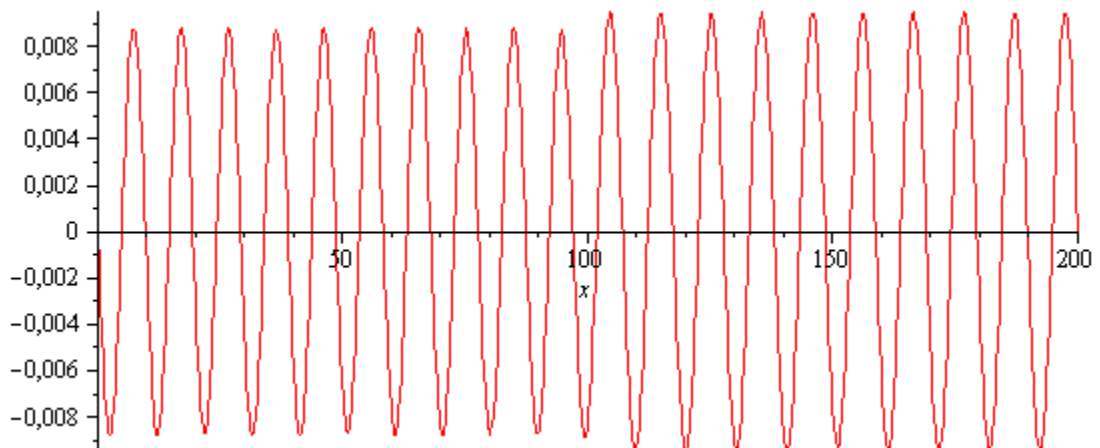
$i$	$k_1$	$k_2$
21	14	7
22	14	8
23	15	8
24	15	9
25	15	10
26	15	11
27	15	12
28	16	12
29	16	13
30	16	14
31	17	14
32	17	15
33	18	15
34	18	16
35	18	17
36	19	17
37	19	18
38	20	18
39	20	19
40	21	19

$i$	$k_1$	$k_2$
41	21	20
42	22	20
43	22	21
44	22	22
45	23	22
46	23	23
47	24	23
48	24	24
49	25	24
50	25	25
51	26	25
52	26	26
53	27	26
54	27	27
55	28	27
56	28	28
57	29	28
58	29	29
59	30	29
60	30	30

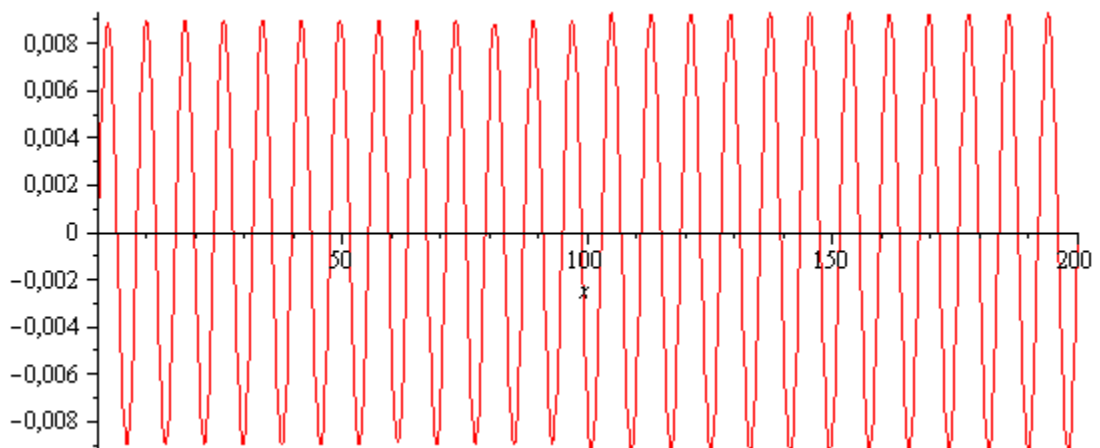
Nas figuras 3.22 a 3.24 é possível observar como a amplitude de ambos os troços se vai aproximando à medida que se aumenta o número do modo de vibração.



**3.22 •** Trigésimo modo de vibração da viga descontínua



**3.23 •** Quadragésimo modo de vibração da viga descontínua



**3.24 •** Quinquagésimo modo de vibração da viga descontínua



## 4 – Viga descontínua sujeita a uma carga móvel

Suponha-se agora que a viga descontínua estudada no capítulo 3 está sujeita à passagem de uma carga móvel pontual de intensidade constante. Esta carga representa um único eixo de um veículo, nomeadamente o de um comboio de alta velocidade.

Considera-se por simplificação que a velocidade e intensidade da carga são constantes. Trata-se de uma aproximação razoável para um comboio a deslocar-se em linha recta a velocidade de ponta, em que a variação cíclica da intensidade da carga normalmente associada a este tipo de transporte é suficientemente baixa para ser desprezada.

O carregamento (anteriormente designado genericamente por  $p(x,t)$ ) devido à passagem de uma única carga pontual a uma velocidade  $s$  (constante e positiva) e com intensidade constante  $P$  pode ser expresso como

$$p(x,t) = \delta(x-st) P. \quad (4.1)$$

Esta definição faz uso da função delta de Dirac, que toma um valor infinito no ponto  $x = 0$  e zero nos restantes pontos, e cujo integral de menos infinito a mais infinito é igual à unidade. Assim a expressão (4.1) simula um carregamento pontual com a intensidade desejada,  $P$ , em que no instante  $t = 0$  o carregamento se encontra na extremidade esquerda da viga descontínua,  $x = 0$ .

Estando a viga em regime elástico linear e considerando a teoria dos pequenos deslocamentos (como mencionado em 2.1, na dedução da equação de movimento), a solução para um veículo completo poderia ser obtida por sobreposição dos efeitos das cargas individuais.

### 4.1 – Solução particular

De acordo com esta definição do carregamento, e tendo em conta que a rigidez e amortecimento de fundação não são constantes ao longo de todo o comprimento da viga, reescreve-se a equação de movimento, (2.7), como

$$EI \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + c(x) \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} + k(x) y(x,t) = \delta(x-st) P. \quad (4.2)$$

Assume-se ainda que, no instante inicial,  $t = 0$ , não se observam na viga nem deformações nem velocidades iniciais, isto é,

$$y(x,0) = 0, \quad \left. \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \quad (4.3)$$

Considera-se ainda que a massa da carga em movimento é negligenciável face à massa da viga, ou seja, apenas se considerará o seu efeito gravitacional.

#### 4. Viga descontínua sujeita a uma carga móvel

Da mesma forma que a solução da equação homogénea (2.8) é o produto de uma componente espacial por uma componente temporal, a solução para o carregamento referido consiste no somatório do produto de cada função de forma normalizada (função do espaço,  $x$ ) pelo chamado deslocamento generalizado correspondente (função do tempo,  $t$ ). É este processo conhecido por sobreposição modal. A solução exacta requer que este procedimento seja realizado para um número infinito de modos, ou seja,

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(t) v_i(x). \quad (4.4)$$

Resta determinar a função  $f_i(t)$ , o deslocamento generalizado, para cada modo de vibração  $i$ . É necessário substituir então a definição (4.4) na equação de movimento, (4.2):

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left( \sum_{i=1}^{\infty} f_i(t) v_i(x) \right) + m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \sum_{i=1}^{\infty} f_i(t) v_i(x) \right) \\ + c(x) \frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_{i=1}^{\infty} f_i(t) v_i(x) \right) + k(x) \sum_{i=1}^{\infty} f_i(t) v_i(x) = \delta(x - st) P \Leftrightarrow \\ EI \left( \sum_{i=1}^{\infty} f_i(t) \frac{d^4 v_i(x)}{dx^4} \right) + m \left( \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d^2 f_i(t)}{dt^2} v_i(x) \right) \\ + c(x) \left( \sum_{i=1}^{\infty} \frac{df_i(t)}{dt} v_i(x) \right) + k(x) \sum_{i=1}^{\infty} f_i(t) v_i(x) = \delta(x - st) P. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Tendo em conta que, para um dado troço  $r$  de comprimento  $l$ , o modo de vibração  $i$  é dado por

$$v_{r,i}(x) = A_{r,i} \cosh(\lambda_{r,i} x/l_r) + B_{r,i} \sinh(\lambda_{r,i} x/l_r) + C_{r,i} \cos(\lambda_{r,i} x/l_r) + D_{r,i} \sin(\lambda_{r,i} x/l_r), \quad (4.6)$$

em que os coeficientes  $A_{r,i}$ ,  $B_{r,i}$ ,  $C_{r,i}$  e  $D_{r,i}$  se encontram normalizados, conclui-se que a quarta derivada de qualquer modo de vibração  $i$  em qualquer troço pode ser expressa como

$$\begin{aligned} \frac{d^4 v_{r,i}(x)}{dx^4} = \frac{\lambda_{r,i}^4}{l_r^4} \left( A_{r,i} \cosh(\lambda_{r,i} x/l_r) + B_{r,i} \sinh(\lambda_{r,i} x/l_r) + \right. \\ \left. + C_{r,i} \cos(\lambda_{r,i} x/l_r) + D_{r,i} \sin(\lambda_{r,i} x/l_r) \right) = \frac{\lambda_{r,i}^4}{l_r^4} v_{r,i}(x). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Tendo em conta a definição apresentada em (2.30), obtém-se

$$\frac{d^4 v_i(x)}{dx^4} = \frac{m\omega_i^2 - k(x)}{EI} v_i(x). \quad (4.8)$$

Substituindo (4.8) em (4.5)

$$\begin{aligned}
 & EI \left( \sum_{i=1}^{\infty} f_i(t) \frac{m\omega_i^2 - k(x)}{EI} v_i(x) \right) + m \left( \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d^2 f_i(t)}{dt^2} v_i(x) \right) \\
 & + c(x) \left( \sum_{i=1}^{\infty} \frac{df_i(t)}{dt} v_i(x) \right) + k(x) \sum_{i=1}^{\infty} f_i(t) v_i(x) = \delta(x - st) P \Leftrightarrow \\
 & \sum_{i=1}^{\infty} \left( m \frac{d^2 f_i(t)}{dt^2} + c(x) \frac{df_i(t)}{dt} + m\omega_i^2 f_i(t) \right) v_i(x) = \delta(x - st) P.
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Multiplica-se então toda a equação por  $m$  e  $v_k(x)$ , em que  $k$  representa o número de um modo de vibração arbitrário, e integra-se toda a equação no intervalo de  $x = 0$  até  $x = L$ :

$$\begin{aligned}
 & \int_{x=0}^L m v_k(x) \sum_{i=1}^{\infty} \left( m \frac{d^2 f_i(t)}{dt^2} + c(x) \frac{df_i(t)}{dt} + m\omega_i^2 f_i(t) \right) v_i(x) dx = \\
 & = \int_{x=0}^L m v_k(x) \delta(x - st) P dx \Leftrightarrow \\
 & \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{d^2 f_i(t)}{dt^2} + \omega_i^2 f_i(t) \right) m^2 \int_{x=0}^L v_i(x) v_k(x) dx + \frac{df_i(t)}{dt} m \int_{x=0}^L c(x) v_i(x) v_k(x) dx = \\
 & = m P \int_{x=0}^L v_k(x) \delta(x - st) dx.
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Dada a ortogonalidade dos modos de vibração, sabe-se que

$$\int_{x=0}^L v_i(x) v_k(x) dx = 0, \quad i \neq k. \tag{4.11}$$

Além disso, tendo em conta que os modos de vibração foram normalizados dividindo-os pela expressão (3.113)

$$m \int_{x=0}^L v_i(x) v_k(x) dx = 1, \quad i = k, \tag{4.12}$$

e assumindo que, embora o amortecimento,  $c(x)$ , possa tomar valores diferentes de troço para troço, é constante dentro do mesmo troço, é possível simplificar (4.10) para obter

$$m \left( \frac{d^2 f_k(t)}{dt^2} + \omega_k^2 f_k(t) \right) + \frac{df_k(t)}{dt} c(x) = m P \int_{x=0}^L v_k(x) \delta(x - st) dx \tag{4.13}$$

#### 4. Viga descontínua sujeita a uma carga móvel

---

Uma vez que  $f_k(t)$  é a função incógnita desta equação diferencial, reescreve-se (4.13) de uma forma mais adequada, e substitui-se o índice  $j$  por  $i$ , visto este ser usualmente empregue ao longo do texto para expressar o número do modo de vibração:

$$m\ddot{f}_i(t) + c(x)\dot{f}_i(t) + m\omega_i^2 f_i(t) = mP \int_{x=0}^L v_i(x) \delta(x-st) dx. \quad (4.14)$$

Regra geral, ao aplicar a sobreposição modal, desenvolve-se a função de carga em série

$$p(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} mQ_i(t) v_i(x), \quad (4.15)$$

em que

$$Q_i(t) = \int_{x=0}^L p(x,t) v_i(x) dx = \int_{x=0}^L P\delta(x-st) v_i(x) dx. \quad (4.16)$$

Como se pode observar, o lado direito da equação (4.14) é igual ao produto de  $Q_i(t)$  pela massa distribuída, vindo então

$$m\ddot{f}_i(t) + c(x)\dot{f}_i(t) + m\omega_i^2 f_i(t) = mQ_i(t). \quad (4.17)$$

Aplica-se então a transformada de Laplace (ver Spiegel [13]) a toda a equação

$$\begin{aligned} m\mathcal{L}\{\ddot{f}_i\}(z) + c(x)\mathcal{L}\{\dot{f}_i\}(z) + m\omega_i^2 \mathcal{L}\{f_i\}(z) &= m\mathcal{L}\{Q_i\}(z) \Leftrightarrow \\ m(z^2 F_i(z) - zf_i(0) - \dot{f}_i(0)) + c(x)(zF_i(z) - f_i(0)) + m\omega_i^2 F_i(z) &= m\mathcal{L}\{Q_i\}(z). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Uma vez que, como já foi referido, se consideram condições iniciais homogêneas (deslocamento e velocidade nulas no instante  $t = 0$ ), tem-se

$$\begin{aligned} mz^2 F_i(z) + c(x)zF_i(z) + m\omega_i^2 F_i(z) &= m\mathcal{L}\{Q_i\}(z) \Leftrightarrow \\ (mz^2 + c(x)z + m\omega_i^2) F_i(z) &= m\mathcal{L}\{Q_i\}(z) \Leftrightarrow \\ F_i(z) &= \mathcal{L}\{Q_i\}(z) / (z^2 + (c(x)/m)z + \omega_i^2). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Estando então definida a função  $F_i(z)$ , aplica-se a inversa da transformada de Laplace:

$$f_i(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\mathcal{L}\{Q_i\}(z)}{z^2 + (c(x)/m)z + \omega_i^2} \right\} (t) = \int_{\tau=0}^t Q_i(\tau) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{z^2 + (c(x)/m)z + \omega_i^2} \right\} (t-\tau) d\tau. \quad (4.20)$$



Considerem-se então as seguintes definições auxiliares:

$$a(x) = \frac{c(x)}{2m}, \quad (4.21)$$

$$b_i(x) = \sqrt{\omega_i^2 - (a(x))^2}. \quad (4.22)$$

Substituindo em (4.20) obtém-se a solução para um carregamento genérico,

$$\begin{aligned} f_i(t) &= \int_{\tau=0}^t Q_i(t) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{z^2 + 2a(x)z + (a(x))^2 + (b_i(x))^2} \right\} (t-\tau) d\tau \\ &= \int_{\tau=0}^t Q_i(t) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(z+a(x))^2 + (b_i(x))^2} \right\} (t-\tau) d\tau \\ &= \int_{\tau=0}^t Q_i(t) \frac{1}{b_i(x)} e^{-a(x)(t-\tau)} \sin(b_i(x)(t-\tau)) d\tau. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Tendo em conta que, da definição da função delta de Dirac,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \delta(t-T) dt = g(T), \quad (4.24)$$

em que  $g(t)$  uma função contínua e diferenciável, e que  $v_i(x)$  não está definida para valores de  $x < 0$  e  $x > L$ , conclui-se que

$$Q_i(t) = \int_{x=0}^L P \delta(x-st) v_i(x) dx = P v_i(st). \quad (4.25)$$

O deslocamento generalizado para uma viga sujeita a uma carga móvel é então

$$f_i(t) = \frac{P}{b_i(x)} \int_{\tau=0}^t v_i(s\tau) e^{-a(x)(t-\tau)} \sin(b_i(x)(t-\tau)) d\tau. \quad (4.26)$$

## 4.2 – Solução não amortecida

Considere-se primeiramente a ausência de amortecimento. Isto permite simplificar a expressão (4.26), obtendo-se:

$$f_i(t) = \frac{P}{\omega_i} \int_{\tau=0}^t v_i(s\tau) \sin(\omega_i(t-\tau)) d\tau. \quad (4.27)$$

Tendo em conta que  $v_i(x)$  é constituído por dois troços, como definido em (3.112), é necessário separar o integral também em duas parcelas, tendo em conta que  $s\tau$  representa a posição da carga ao longo do tempo. Assim, ao integrar a expressão, para valores de  $\tau$  inferiores a  $l/s$ , emprega-se a definição de  $v_i$  para  $x < l$ . Para valores de  $\tau$  superiores a  $l/s$ , emprega-se a definição de  $v_i$  para  $x > l$ . Tendo isto em conta, de (4.27) vem

$$f_i(t) = \begin{cases} \frac{P}{\omega_i} \int_{\tau=0}^t (A_1 \cosh(\lambda_1 s\tau/l) + B_1 \sinh(\lambda_1 s\tau/l) \\ + C_1 \cos(\lambda_1 s\tau/l) + D_1 \sin(\lambda_1 s\tau/l)) \sin(\omega_i(t-\tau)) d\tau, & t \leq l/s \\ \frac{P}{\omega_i} \left( \int_{\tau=0}^{l/s} (A_1 \cosh(\lambda_1 s\tau/l) + B_1 \sinh(\lambda_1 s\tau/l) \right. \\ + C_1 \cos(\lambda_1 s\tau/l) + D_1 \sin(\lambda_1 s\tau/l)) \sin(\omega_i(t-\tau)) d\tau \\ + \int_{\tau=l/s}^t (A_2 \cosh(\lambda_2 (s\tau-l)/l) + B_2 \sinh(\lambda_2 (s\tau-l)/l) \\ \left. + C_2 \cos(\lambda_2 (s\tau-l)/l) + D_2 \sin(\lambda_2 (s\tau-l)/l)) \sin(\omega_i(t-\tau)) d\tau \right), & t > l/s, \end{cases} \quad (4.28)$$

em que  $A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2$  e  $D_2$  são as constantes de integração definidas nas equações (3.104) a (3.111), mas já afectadas da norma introduzida em (3.113). Isto significa que para cada modo  $i$ , as constantes são todas divididas por  $N_i$ .

Realiza-se então a integração analiticamente, sem substituição das constantes de integração, obtendo-se as expressões genéricas (4.29) e (4.30), para valores de  $t < l/s$  e  $t > l/s$ , respectivamente:

$$f_i(t) = \frac{Pl}{\omega_i} \left( A_1 \frac{l \omega_i (\cosh(\lambda_1 st/l) - \cos(\omega_i t))}{\lambda_1^2 s^2 + l^2 \omega_i^2} + B_1 \frac{l \omega_i \sinh(\lambda_1 st/l) - \lambda_1 s \sin(\omega_i t)}{\lambda_1^2 s^2 + l^2 \omega_i^2} \right. \\ \left. - C_1 \frac{l \omega_i (\cos(\lambda_1 st/l) - \cos(\omega_i t))}{\lambda_1^2 s^2 - l^2 \omega_i^2} - D_1 \frac{l \omega_i \sin(\lambda_1 st/l) - \lambda_1 s \sin(\omega_i t)}{\lambda_1^2 s^2 - l^2 \omega_i^2} \right), \quad t \leq l/s, \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned}
f_i(t) = & \frac{Pl}{\omega_i} \left( A_1 \frac{l \omega_i (\cos(\omega_i(t-l/s)) \cosh(\lambda_1) - \cos(\omega_i t)) + \lambda_1 s \sin(\omega_i(t-l/s)) \sinh(\lambda_1)}{\lambda_1^2 s^2 + l^2 \omega_i^2} \right. \\
& + B_1 \frac{\lambda_1 v (\sin(\omega_i(t-l/s)) \cosh(\lambda_1) - \sin(\omega_i t)) + l \omega_i \cos(\omega_i(t-l/s)) \sinh(\lambda_1)}{\lambda_1^2 s^2 + l^2 \omega_i^2} \\
& + C_1 \frac{l \omega_i (\cos(\omega_i t) - \cos(\omega_i(t-l/s)) \cos(\lambda_1)) + \lambda_1 s \sin(\omega_i(t-l/s)) \sin(\lambda_1)}{\lambda_1^2 s^2 - l^2 \omega_i^2} \\
& - D_1 \frac{\lambda_1 v (\sin(\omega_i(t-l/v)) \cos(\lambda_1) - \sin(\omega_i t)) + l \omega_i \cos(\omega_i(t-l/v)) \sin(\lambda_1)}{\lambda_1^2 s^2 - l^2 \omega_i^2} \\
& + A_2 \frac{l \omega_i (\cosh(\lambda_2(st-l)/l) - \cos(\omega_i(t-l/s)))}{\lambda_2^2 s^2 + l^2 \omega_i^2} \\
& + B_2 \frac{l \omega_i \sinh(\lambda_2(st-l)/l) - \lambda_2 s \sin(\omega_i(t-l/s))}{\lambda_2^2 s^2 + l^2 \omega_i^2} \\
& - C_2 \frac{l \omega_i (\cos(\lambda_2(st-l)/l) - \cos(\omega_i(t-l/s)))}{\lambda_2^2 s^2 - l^2 \omega_i^2} \\
& \left. - D_2 \frac{l \omega_i \sin(\lambda_2(st-l)/l) - \lambda_2 s \sin(\omega_i(t-l/s))}{\lambda_2^2 s^2 - l^2 \omega_i^2} \right), \quad t > l/s.
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Estando então perfeitamente definidos tanto os modos de vibração como o deslocamento generalizado correspondente a cada um deles, resta realizar a sobreposição modal definida em (4.4). Uma vez que não é possível fazer a sobreposição para um número infinito de modos, é necessário decidir quantos empregar. Esta decisão passa por pesar dois factores opostos: rapidez na obtenção das soluções e precisão das mesmas dentro do limite de aplicação considerado.

O primeiro passo é então definir a gama de valores de velocidade que se pretende estudar. De acordo com Fryba [6], numa viga infinita, a velocidade crítica, aquela para a qual se verifica ressonância do sistema, é dada por

$$s_{cr} = \sqrt[4]{4 \frac{k EI}{m^2}}. \tag{4.31}$$

Embora a viga em estudo seja finita, dado o seu comprimento considerável, a equação (4.31) pode fornecer uma boa aproximação para a velocidade crítica em cada um dos troços.

Aplicando então essa expressão a ambos os troços, a velocidade crítica vem

$$s_{cr,1} = 205.574 \text{ m/s}, \tag{4.32}$$

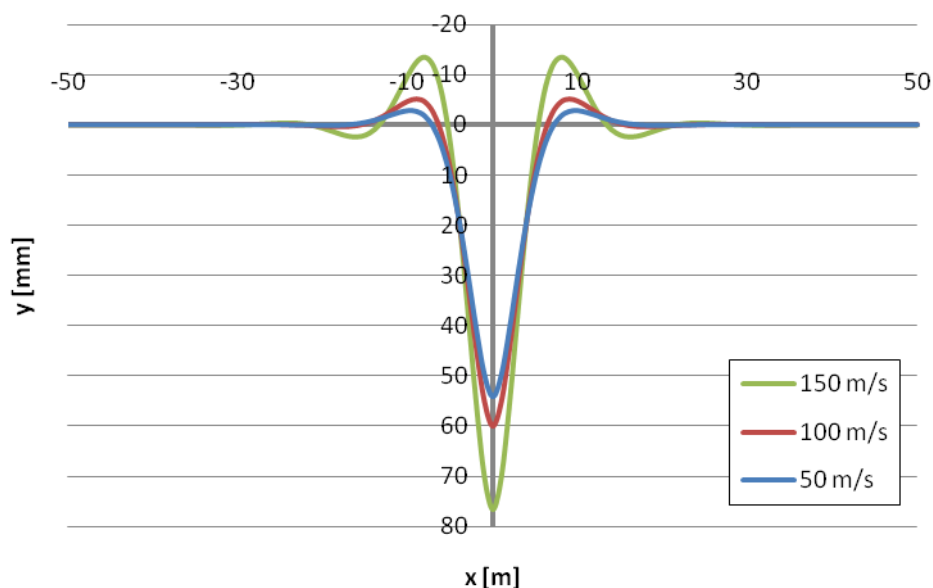
$$s_{cr,2} = 244.470 \text{ m/s}, \tag{4.33}$$

#### 4. Viga descontínua sujeita a uma carga móvel

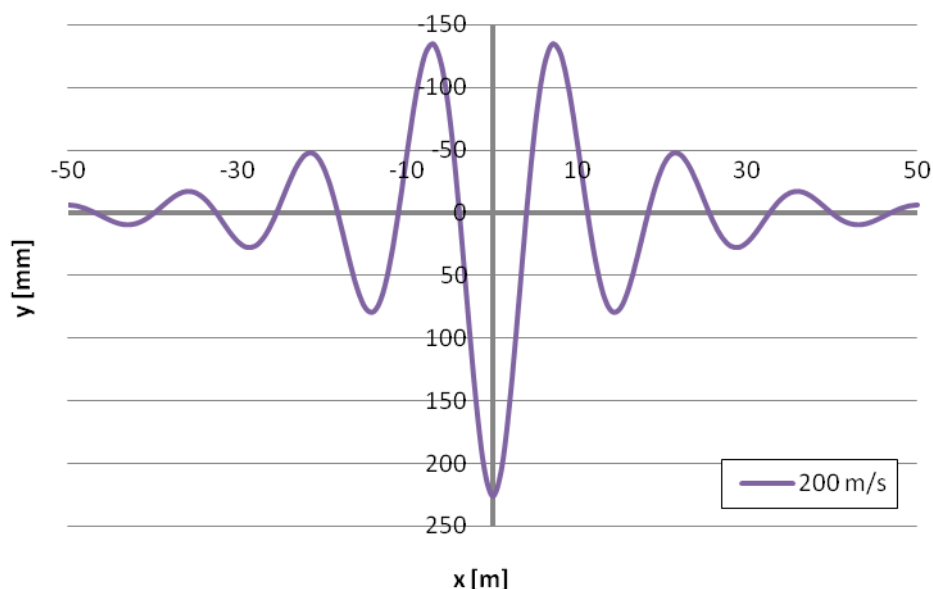
que correspondem aproximadamente a 740 km/h e 880 km/h, respectivamente. Embora estas velocidades não sejam praticáveis para linhas férreas correntes (o actual recorde é de aproximadamente 574 km/h), a velocidade crítica pode ser muito inferior para solos de má qualidade, em que a constante de Winkler é inferior às consideradas, bem como para vigas com massa superior. O estudo Kaynia *et al.* [7] confirma a ocorrência deste fenómeno.

Considerando uma viga infinita com rigidez de fundação igual à do troço 1 ( $k = 500 \text{ kN/m}^2$ ) e sem amortecimento, recorre-se a Frýba [6] para determinar a deformada quase-estacionária quando sujeita a uma carga móvel de intensidade 166 800 kN (que corresponde ao peso de um único eixo do comboio Thalys, de acordo com Correia *et al.* [3]), para várias velocidades sub-críticas e super-críticas.

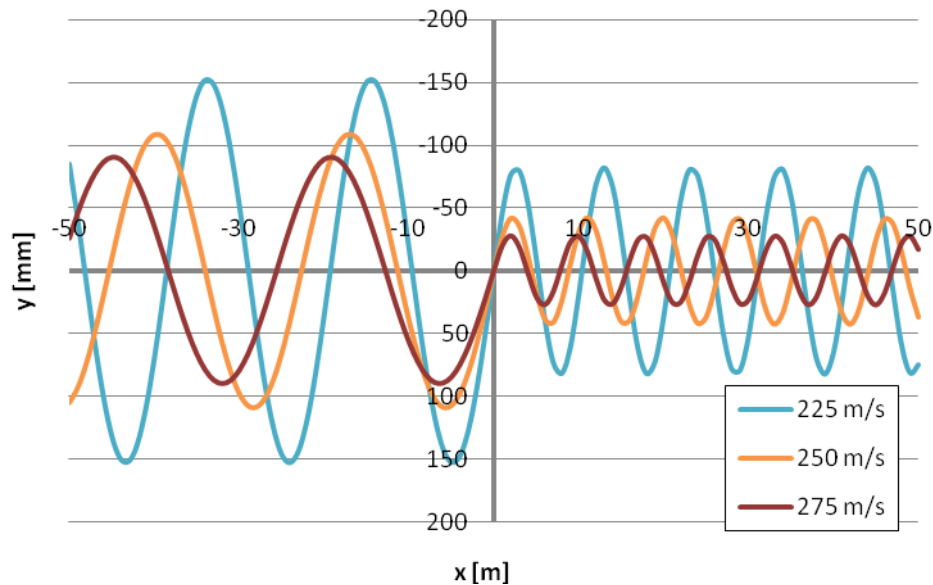
Os resultados são os apresentados nas figuras 4.1 a 4.3, em que o ponto  $x = 0$  representa o ponto de aplicação da carga móvel.



**Figura 4.1** • Deformada quase-estacionária numa viga infinita de rigidez  $k_1$  para velocidades sub-críticas



**Figura 4.2** • Deformada quase-estacionária numa viga infinita de rigidez  $k_1$  para uma velocidade de 200 m/s



**Figura 4.3** • Deformada quase-estacionária numa viga infinita de rigidez  $k_1$  para velocidades super-críticas

Para as velocidades sub-críticas mais baixas (figura 4.1), a deformada é pronunciadamente no sentido descendente, com pequenas ondas em redor no sentido ascendente. Também é notória a simetria da deformada em relação ao ponto de aplicação da carga, que corresponde ao ponto de maior deslocamento descendente. Quanto maior a distância a este ponto, menores os deslocamentos observados. Como se verá mais à frente, esta configuração é semelhante à deformada estática.

À medida que a velocidade se aproxima do seu valor crítico, a amplitude do deslocamento ascendente vai aproximando-se cada vez mais da do descendente, como se constata na figura 4.2. Note-se que a deformada continua a apresentar simetria relativamente ao eixo  $x = 0$ , o ponto de maior deslocamento descendente continua a ser o ponto de aplicação da carga e os deslocamentos diminuem com o aumento da distância a este ponto.

No caso da viga infinita não amortecida o deslocamento para a velocidade crítica tende para infinito, pois na ausência de apoios e mecanismos de dissipação de energia, a ressonância amplifica os deslocamentos sem qualquer impedimento.

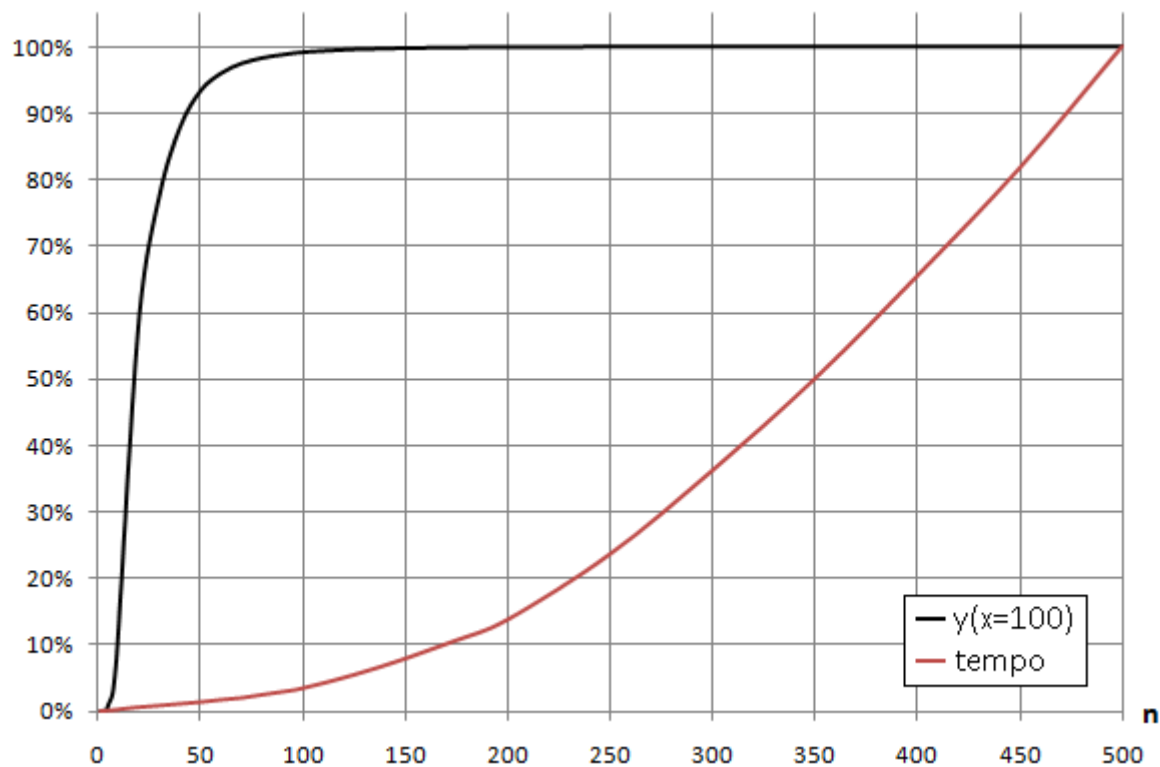
Por fim, para as velocidades super-críticas, como se pode ver na figura 4.3, a deformada deixa de ser simétrica, passando o deslocamento à direita de  $x = 0$  a ser consideravelmente inferior ao da esquerda. O ponto de aplicação da carga tem agora deslocamento nulo, e o deslocamento ascendente tem a mesma amplitude que o descendente. Ao contrário do que se observou para as velocidades sub-críticas, a amplitude do deslocamento não atenua com a distância ao ponto de aplicação da carga.

Estudar-se-ão então as duas velocidades críticas apresentadas, por serem importantes no estudo do comportamento da viga descontínua. Acrescentam-se ainda três velocidades sub-críticas, 50 m/s (180 km/h), 150 m/s (540 km/h) e 175 m/s (630 km/h), e duas sobre-críticas, 275 m/s (990 km/h) e 300 m/s (1 080 km/h). Para ter uma melhor precisão de resultados, considerou-se ainda uma velocidade intermédia entre a velocidade crítica de ambos os troços, 225 m/s (810 km/h).

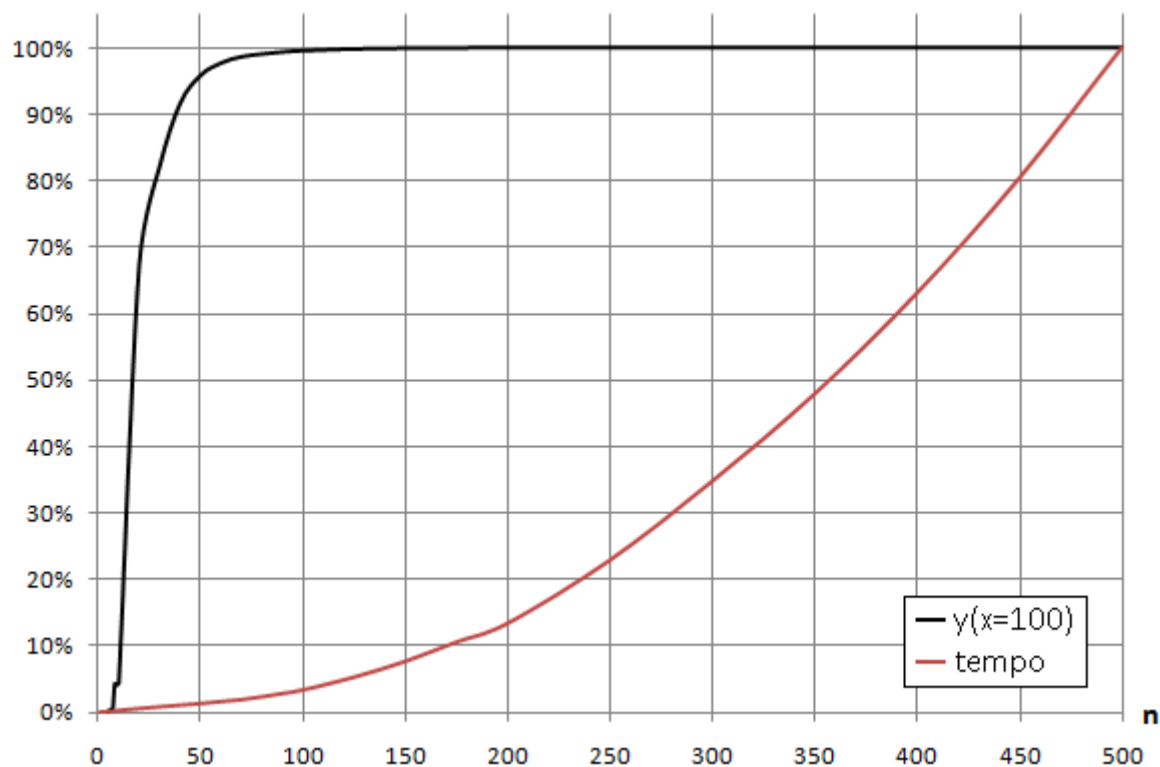
Realizou-se então um estudo de convergência que consistiu em estudar o deslocamento no ponto  $x = 100$  no instante de tempo em que a carga móvel passa por esse mesmo ponto, para algumas das velocidades consideradas. O número de modos empregue variou entre 1 e 500.

#### 4. Viga descontínua sujeita a uma carga móvel

Obtiveram-se os resultados que se apresentam de seguida nas figuras 4.4 a 4.10, em que se expressa o deslocamento obtido e tempo consumido para a sobreposição de  $n$  modos como percentagem do resultado obtido para a sobreposição de 500 modos, o maior número que se empregou.



**Figura 4.4** • Estudo de convergência para a velocidade sub-crítica de 50 m/s



**Figura 4.5** • Estudo de convergência para a velocidade sub-crítica de 150 m/s

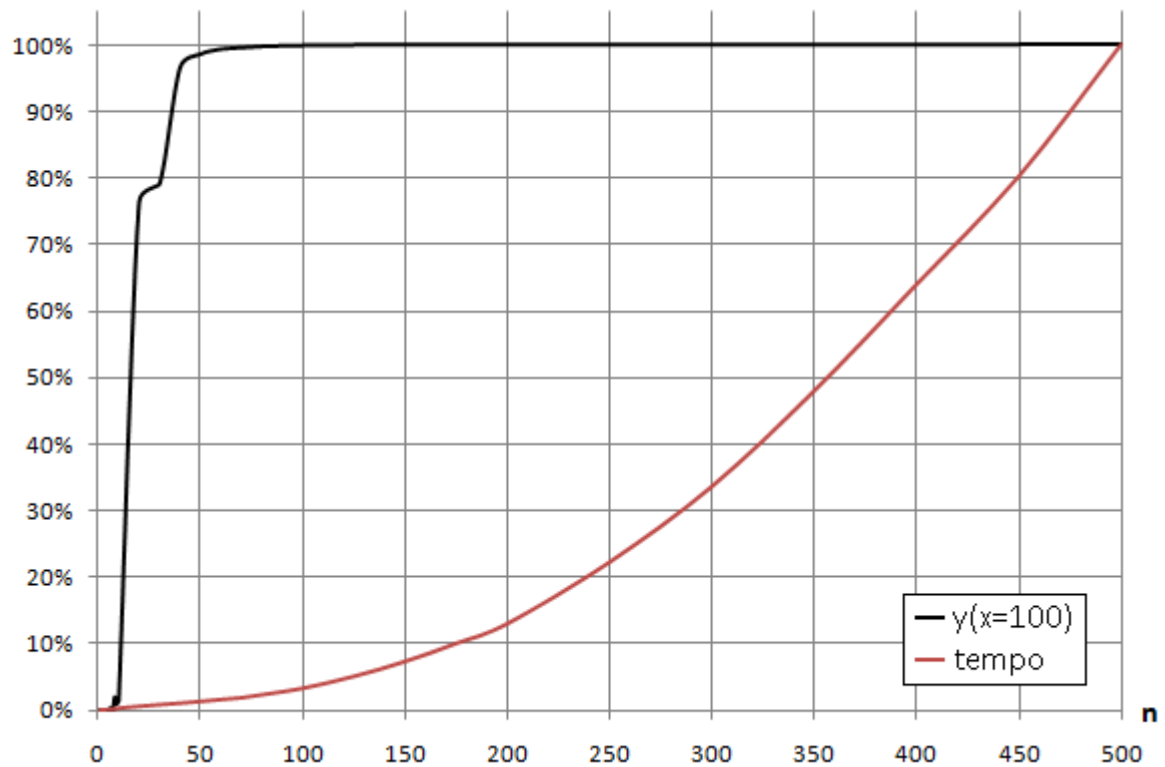


Figura 4.6 • Estudo de convergência para a velocidade crítica do trecho 1

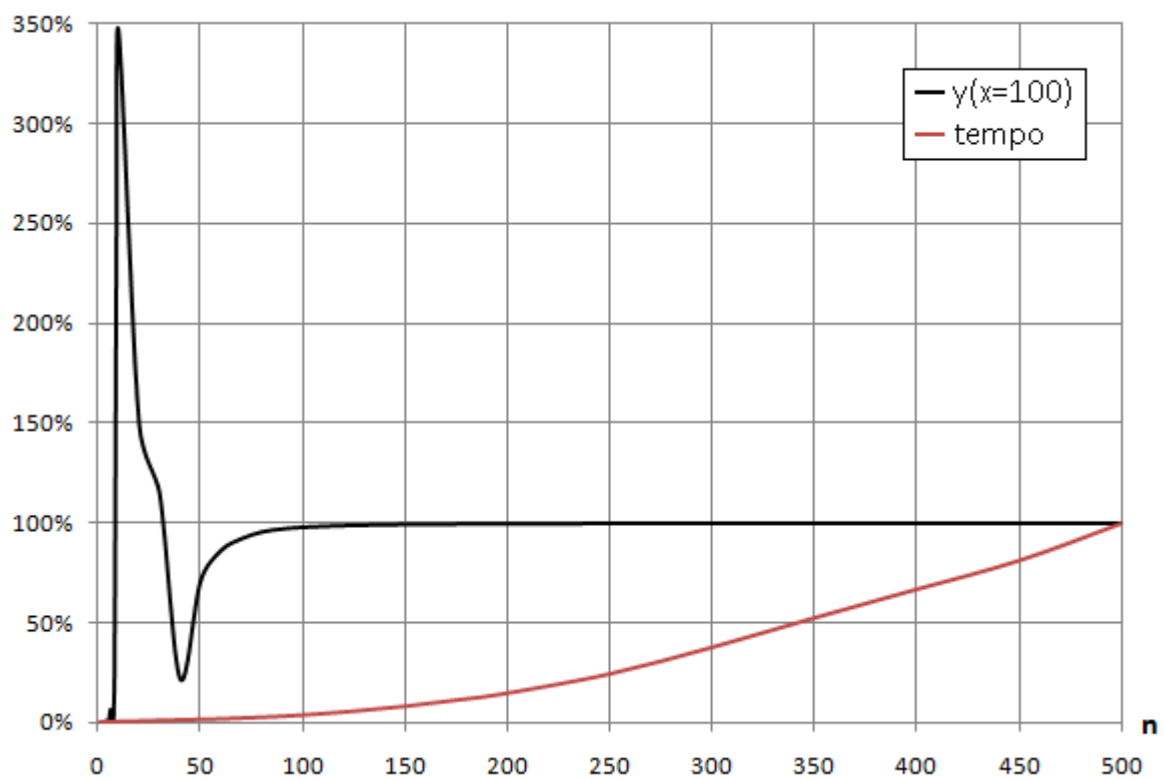


Figura 4.7 • Estudo de convergência para a velocidade crítica do trecho 2

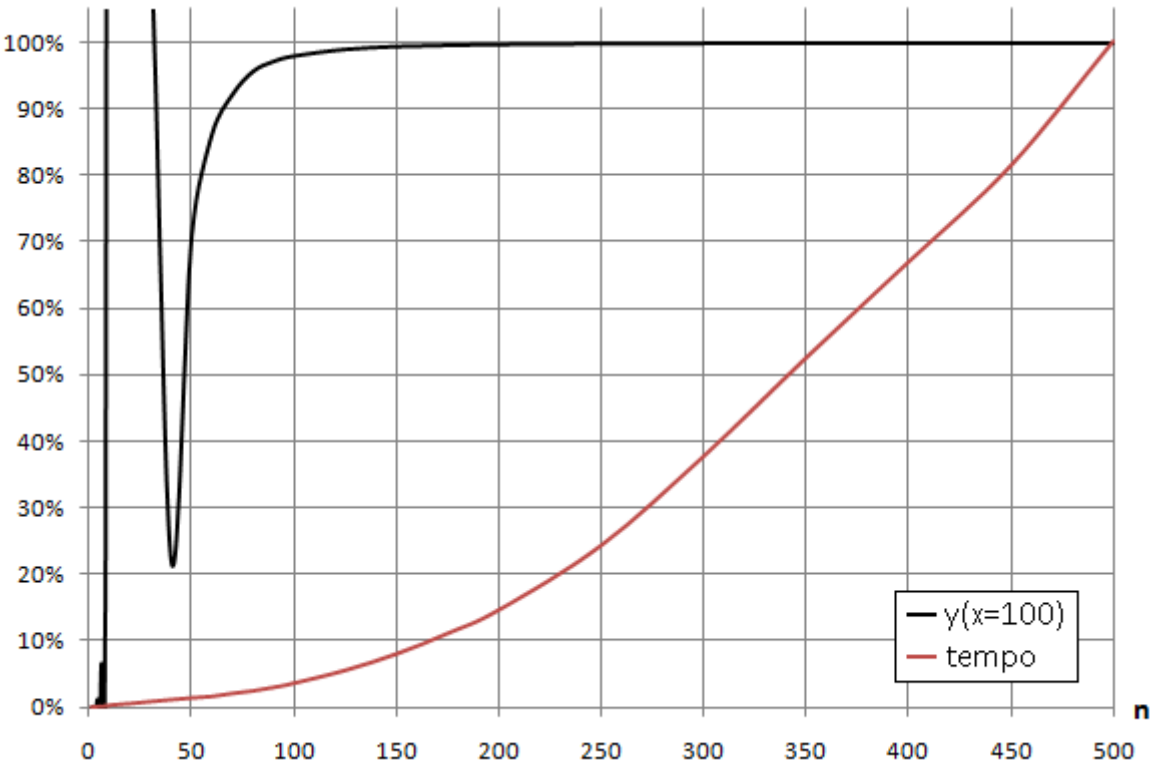


Figura 4.8 • Pormenor do estudo de convergência para a velocidade crítica do troço 2

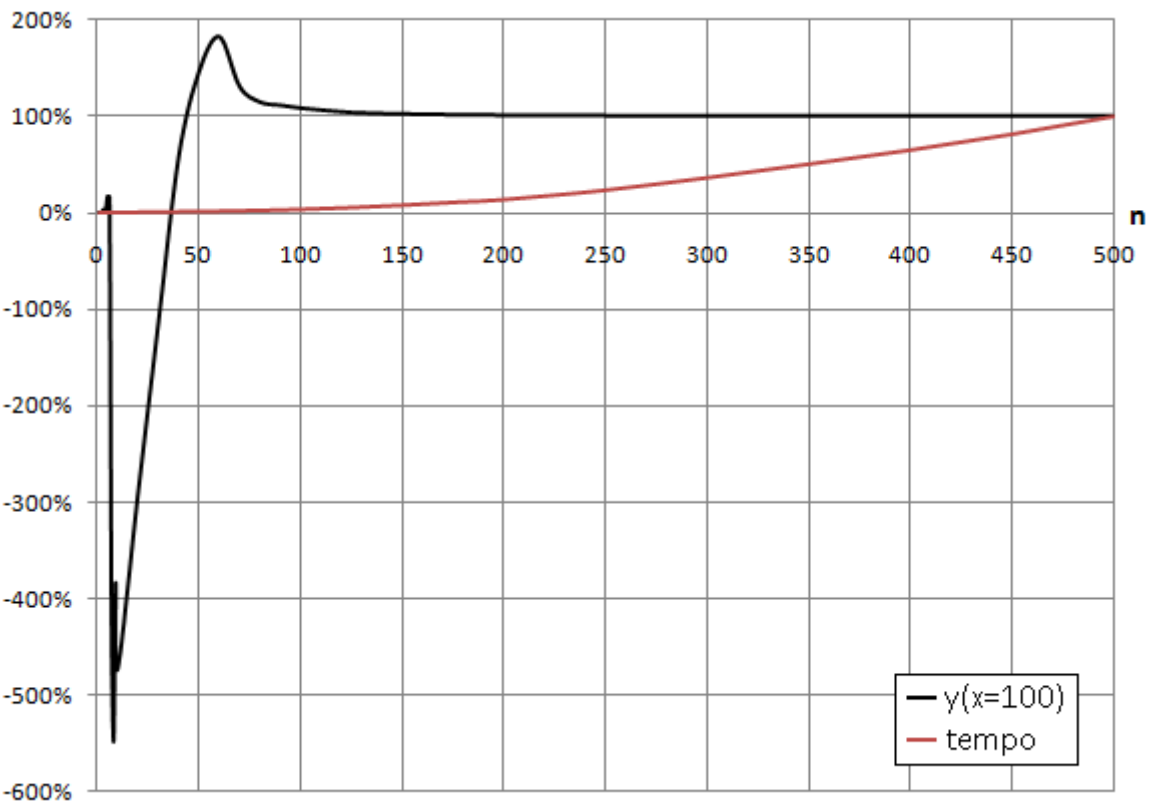
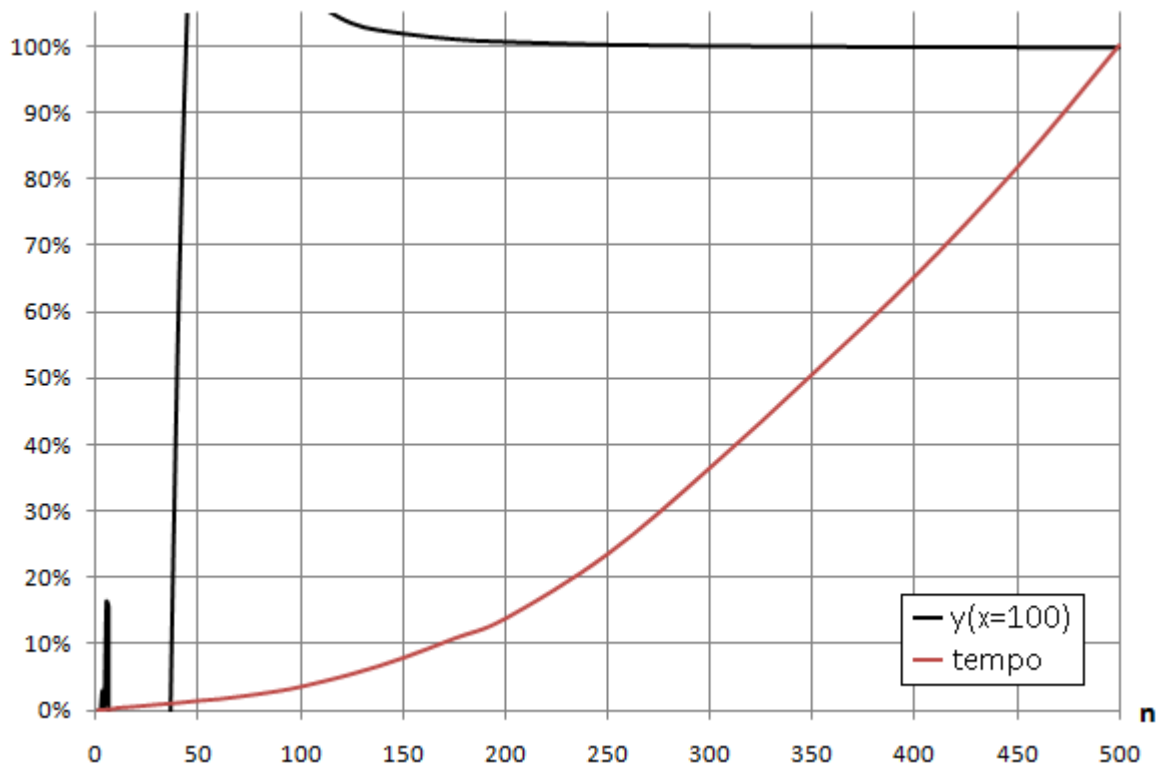


Figura 4.9 • Estudo de convergência para a velocidade super-crítica de 300 m/s





**Figura 4.10** • Pormenor do estudo de convergência para a velocidade super-crítica de 300 m/s

Como se pode observar nas figuras, para velocidades relativamente baixas, nomeadamente entre os 50 m/s e a velocidade crítica do primeiro troço, 205.574 m/s, a convergência ocorre rapidamente e de forma assintótica. Verifica-se que nestes casos o emprego de 150 modos leva a um erro de apenas 0.26%, 0.13% e 0.04%, respectivamente para as velocidades de 50, 150 e 205.574 m/s.

A melhoria que se poderia alcançar ao aumentar o número de modos é, nestes casos, pouco apelativa, tendo em conta que ao passar para 300 modos, por exemplo, o tempo necessário para calcular as raízes e efectuar a sobreposição modal é mais de quatro vezes superior ao emprego para 150 modos.

Contudo, para velocidades superiores, a convergência é muito menos directa, obtendo-se valores muito díspares para um número de modos ligeiramente diferentes. Assim, os 150 modos que nos casos anteriores conduziam a uma boa aproximação, levam agora a um erro de 0.53% e 2.08%, para as velocidades de 244.470 e 300 m/s, respectivamente. Ao aumentar o número de modos para 300, o erro associado baixa para 0.05% e 0.80%, respectivamente.

Este resultado vem confirmar a ideia presente em muita da bibliografia existente sobre o assunto (entre os quais Frýba [6]): para obter uma boa aproximação, o método de sobreposição modal requer tantos mais modos quanto maior a velocidade.

Assim, a decisão foi empregar um total de 300 modos, por se acreditar ser um bom equilíbrio entre precisão e rapidez.

Para efeitos de comparação torna-se necessário estudar o caso estático, que corresponde a um modelo em que a velocidade é tão baixa que não induz vibrações na estrutura, sendo as deformações apresentadas resultantes do equilíbrio estático e não dinâmico. Esta solução é bastante conhecida, pelo que a referência é breve.

#### 4. Viga descontínua sujeita a uma carga móvel

---

Tendo isto em conta, reescreve-se a equação de equilíbrio (2.7), retirando as parcelas dependentes do tempo, uma vez que não se considera a inércia associada ao movimento:

$$EI \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + k y(x,t) = p(x,t). \quad (4.34)$$

Aplicando o mesmo princípio visto em 2.2, a solução da equação homogénea (isto é, quando  $p(x,t) = 0$ ), vem

$$y(x) = e^{\beta x} (C \cos(\beta x) + D \sin(\beta x)) + e^{-\beta x} (C \cos(\beta x) + D \sin(\beta x)), \quad (4.35)$$

com

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{k}{4 EI}}, \quad (4.36)$$

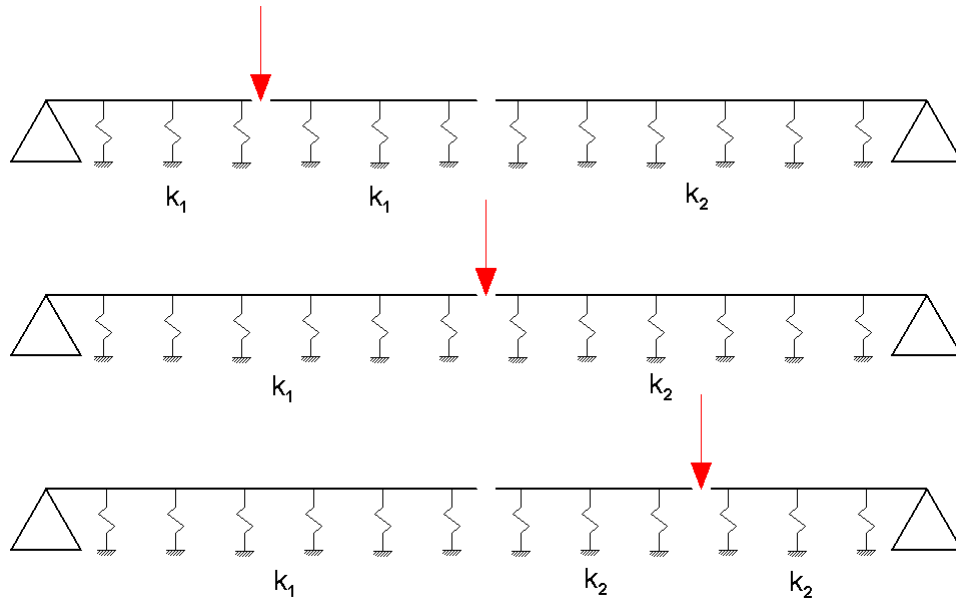
desde que  $k$  e  $EI$  sejam constantes no intervalo considerado. Esta solução é fruto das raízes serem números complexos com parte real e imaginária não nulas, como referido em 3.3 e apresentado da figura 3.6.

Tendo então dois troços com rigidez diferente ( $k_1$  e  $k_2$ ), tem-se um total de oito constantes de integração, que podem ser determinadas considerando as quatro condições de fronteira (deslocamento e momento flector nulos nos apoios) e quatro condições de continuidade (igualdade de deslocamentos, rotações, momento flector e esforço transversal à esquerda e direita do ponto de descontinuidade).

Para resolver a equação para uma carga pontual considera-se contudo que a viga é constituída por três troços. Caso a carga esteja à esquerda do ponto de descontinuidade, ter-se-ão dois troços de rigidez  $k_1$ , um que se inicia no apoio e termina no ponto em que a carga está aplicada, e outro desde este ponto à ao ponto de descontinuidade. O terceiro troço será igual ao troço 2 até agora considerado. Quando a carga está à direita do ponto de descontinuidade, tem-se o troço 1 tal como definido anteriormente, e o troço 2 é substituído por dois troços de rigidez  $k_2$ , um desde a descontinuidade até ao ponto de aplicação da carga, e outro desde este ponto até ao apoio. Quando a carga está precisamente sobre o ponto de descontinuidade, basta considerar os dois troços habituais. A figura 4.11 representa estes três casos.

Como nenhum dos troços tem carregamento no vão, pode-se aplicar a solução homogénea (4.35). As doze constantes de integração resultantes obtêm-se por aplicação das condições de fronteira, continuidade no ponto de descontinuidade e continuidade e equilíbrio no ponto de aplicação da carga pontual. Significa isto que, além da igualdade de translações, rotações e momento flector à esquerda e à direita do ponto de aplicação da carga (designado por  $x = d$ ), o esforço transversal tem que respeitar

$$V(d^-) = V(d^+) + P. \quad (4.37)$$

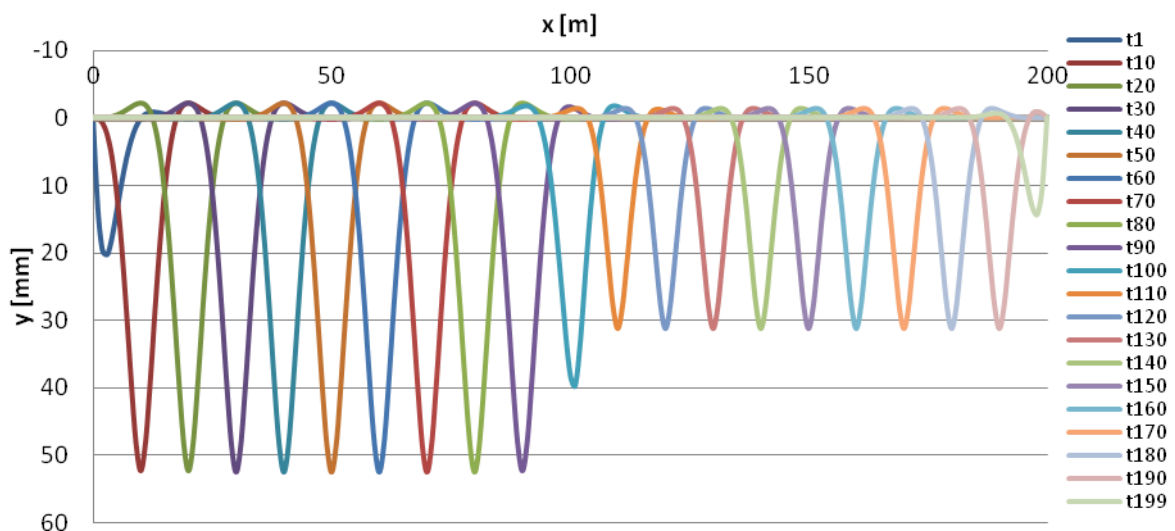


**Figura 4.11** • Modelo de estudo do caso estático com a carga à esquerda, sobre e à direita da descontinuidade

Tendo assim quatro condições de fronteira e quatro condições de continuidade e equilíbrio para cada um dos pontos, é possível determinar todas as constantes e obter a deformada.

Considera-se daqui para a frente que a carga  $P$  toma o valor de 166 800 kN, já referido no estudo da deformada quase-estacionária em viga infinita.

Na figura 4.12 representa-se o deslocamento na viga descontínua ao longo do tempo, quando sujeita à carga  $P$ , considerando uma solução estática (que será equivalente a uma velocidade muito baixa, praticamente nula). A nomenclatura  $t_j$  representa o instante de tempo em que a carga  $P$  está na posição  $x = j$ .



**Figura 4.12** • Deslocamento na viga ao longo do tempo para a solução estática

É notória a diferença em termos de deslocamentos entre os dois troços. No quadro 4.1 resumem-se os valores máximos do deslocamento ascendente e descendente, e em que ponto e para que posição da carga ocorrem, sendo que  $d$  representa a posição da carga em metros.

#### 4. Viga descontínua sujeita a uma carga móvel

##### Quadro 4.1

Deslocamentos máximos na viga descontínua para a solução estática

	$d \leq 100$		$d \geq 100$		absoluto	
	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2
$y_{\text{MAX}}^- [\text{mm}]$	-2.3624	-2.0188	-2.0188	-1.7180	-2.3624	-2.0188
$x [\text{m}]$	5	106	97	108	5	106
$d [\text{m}]$	15	97	106	100	15	97
$y_{\text{MAX}}^+ [\text{mm}]$	54.6678	39.6603	39.6603	39.6603	54.6678	39.6603
$x [\text{m}]$	5	100	100	100	5	100
$d [\text{m}]$	5	100	100	100	5	100

Como se pode ver, o troço 1 tem um deslocamento descendente máximo superior ao observado no troço 2. Já o deslocamento máximo ascendente é bastante parecido nos dois troços, embora o valor máximo mais corrente no troço 2 seja algo inferior, como se verá de seguida. Comparativamente, o deslocamento ascendente é muito inferior ao ascendente

O deslocamento máximo ascendente e descendente para cada ponto da viga pode ser observado nas figuras 4.13 e 4.14, respectivamente. Nesta última é possível verificar que o valor máximo do deslocamento ascendente no troço 2 ocorre apenas junto ao ponto de descontinuidade. O valor máximo mais comum neste troço é de 1.3118 mm.

Note-se que a presença de picos junto aos apoios se deve ao facto de a sua presença impedir a formação de parte dos deslocamentos ascendentes que equilibram a carga aplicada num sistema de fundação elástica, o que leva a maiores deformações nestas zonas.

Estes dados têm a utilidade de servirem de controlo aos resultados obtidos para o caso dinâmico. Ao dividir os deslocamentos máximos obtidos para as várias velocidades, é possível determinar o factor de amplificação associado a cada uma dessas velocidades.

Apresentam-se de seguida, nos quadros 4.2 a 4.9, os deslocamentos máximos ascendente e descendente para as várias velocidades consideradas, bem como o ponto em que ocorrem e para que posição da carga móvel (expressa como  $s/t$ , o produto da velocidade pelo tempo decorrido desde o instante em que a carga partiu de  $x = 0$ ).

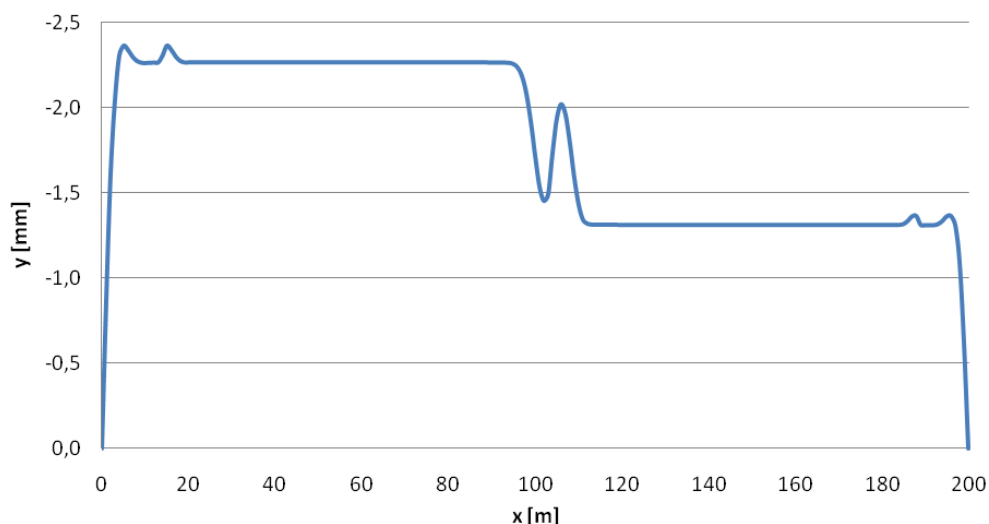
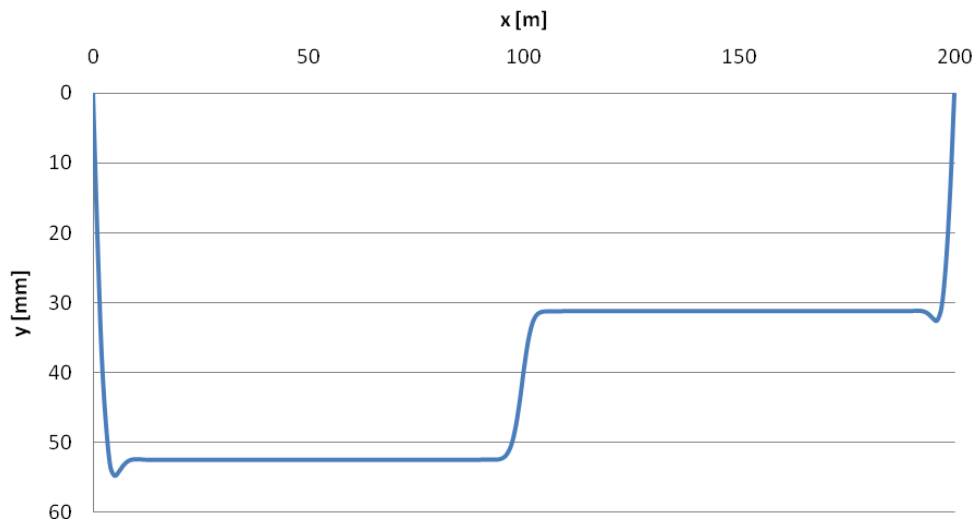


Figura 4.13 • Deslocamento ascendente máximo em cada ponto da viga para a solução estática



**Figura 4.14** • Deslocamento descendente máximo em cada ponto da viga para a solução estática

Note-se que os deslocamentos estão separados entre o instante antes e depois de a carga passar o ponto de descontinuidade, e apresenta-se o máximo absoluto (isto é, independentemente do tempo) e o factor de amplificação deste último face ao caso estático.

#### Quadro 4.2

Deslocamentos máximos na viga para a velocidade sub-crítica de 50 m/s

	$s \leq 100$		$s \geq 100$		absoluto		amplificação	
	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2
$y_{\text{MAX}}^- [\text{mm}]$	-6.7012	-4.3266	-5.8879	-4.4764	-6.7012	-4.4764	2.84	2.22
$x [\text{m}]$	6	101	92	100	6	100		
$s \text{ } t [\text{m}]$	15	92	101	110	15	110		
$y_{\text{MAX}}^+ [\text{mm}]$	60.3220	38.9753	38.9753	38.9753	60.3220	38.9753	1.10	0.98
$x [\text{m}]$	8	100	100	100	8	100		
$s \text{ } t [\text{m}]$	8	100	100	100	8	100		

#### Quadro 4.3

Deslocamentos máximos na viga para a velocidade sub-crítica de 150 m/s

	$s \leq 100$		$s \geq 100$		absoluto		amplificação	
	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2
$y_{\text{MAX}}^- [\text{mm}]$	-41.9531	-29.5188	-49.6628	-43.6141	-49.6628	-43.6141	21.02	21.60
$x [\text{m}]$	7	101	99	100	99	100		
$s \text{ } t [\text{m}]$	16	93	105	105	105	105		
$y_{\text{MAX}}^+ [\text{mm}]$	100.4437	83.7154	78.0947	78.0947	100.4437	83.7154	1.84	2.11
$x [\text{m}]$	16	100	100	100	16	100		
$s \text{ } t [\text{m}]$	16	99	100	100	15	99		

#### 4. Viga descontínua sujeita a uma carga móvel

##### Quadro 4.4

Deslocamentos máximos na viga para a velocidade sub-crítica de 175 m/s

	$s \leq 100$		$s \geq 100$		absoluto		amplificação	
	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2
$y_{MAX}^-$ [mm]	-62.0477	-38.1772	-76.8445	-76.1127	-76.8445	-76.1127	32.53	37.70
$x$ [m]	24	103	99	100	99	100		
$s \cdot t$ [m]	32	96	107	107	107	107		
$y_{MAX}^+$ [mm]	132.7607	106.1391	106.1391	106.1391	132.7607	106.1391	2.43	2.68
$x$ [m]	32	100	100	100	32	100		
$s \cdot t$ [m]	32	100	100	100	32	100		

##### Quadro 4.5

Deslocamentos máximos na viga para a velocidade crítica do troço 1, 205.574 m/s

	$s \leq 100$		$s \geq 100$		absoluto		amplificação	
	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2
$y_{MAX}^-$ [mm]	-244.1883	-245.5967	-365.1886	-365.1886	-365.1886	-365.1886	154.58	180.89
$x$ [m]	100	101	100	100	100	100		
$s \cdot t$ [m]	95	96	125	125	125	125		
$y_{MAX}^+$ [mm]	308.2305	259.8729	369.8714	369.8714	369.8714	369.8714	6.77	9.33
$x$ [m]	98	100	100	100	100	100		
$s \cdot t$ [m]	100	100	116	116	116	116		

##### Quadro 4.6

Deslocamentos máximos na viga para a velocidade intermédia de 225 m/s

	$s \leq 100$		$s \geq 100$		absoluto		amplificação	
	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2
$y_{MAX}^-$ [mm]	-194.0837	-127.5594	-368.9050	-318.5823	-368.9050	-318.5823	156.16	157.81
$x$ [m]	86	101	98	100	98	100		
$s \cdot t$ [m]	100	88	149	149	149	149		
$y_{MAX}^+$ [mm]	191.2675	139.6480	358.3618	318.2832	358.3618	318.2832	6.56	8.03
$x$ [m]	77	102	98	100	98	100		
$s \cdot t$ [m]	82	94	159	140	159	140		

##### Quadro 4.7

Deslocamentos máximos na viga para a velocidade crítica do troço 2, 244.470 m/s

	$s \leq 100$		$s \geq 100$		absoluto		amplificação	
	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2
$y_{MAX}^-$ [mm]	-139.2040	-70.1786	-277.0919	-235.2893	-277.0919	-235.2893	117.29	116.55
$x$ [m]	51	103	96	191	96	191		
$s \cdot t$ [m]	67	82	199	199	199	199		
$y_{MAX}^+$ [mm]	140.8604	68.5386	263.6295	313.9252	263.6295	313.9252	4.82	7.92
$x$ [m]	37	118	97	197	97	197		
$s \cdot t$ [m]	42	92	189	199	189	199		

**Quadro 4.8**

Deslocamentos máximos na viga para a velocidade super-crítica de 275 m/s

	$s \leq 100$		$s \geq 100$		absoluto		amplificação	
	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2
$y_{MAX}^-$ [mm]	-108.5638	-39.2834	-165.7276	-133.9883	-165.7276	-133.9883	70.15	66.37
$x$ [m]	34	103	95	186	95	186		
$s \ t$ [m]	53	93	191	199	191	199		
$y_{MAX}^+$ [mm]	109.2206	38.1559	176.8965	135.3236	176.8965	135.3236	3.24	3.41
$x$ [m]	25	130	83	176	83	176		
$s \ t$ [m]	31	92	192	197	192	197		

**Quadro 4.9**

Deslocamentos máximos na viga para a velocidade super-crítica de 300 m/s

	$s \leq 100$		$s \geq 100$		absoluto		amplificação	
	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2
$y_{MAX}^-$ [mm]	-94.4755	-27.9465	-149.7975	-93.0274	-149.7975	-93.0274	63.41	46.08
$x$ [m]	28	101	94	175	94	175		
$s \ t$ [m]	49	99	199	190	199	190		
$y_{MAX}^+$ [mm]	94.8591	26.9557	145.0581	94.3362	145.0581	94.3362	2.65	2.38
$x$ [m]	21	124	95	182	95	182		
$s \ t$ [m]	28	83	186	187	186	187		

Como se pode observar, o factor de amplificação para os deslocamentos ascendentes é muito superior ao dos descendentes, visto no caso estático os primeiros serem muito reduzidos face a estes últimos. Como visto na solução estacionária da viga infinita, à medida que aumenta a velocidade, o deslocamento ascendente começa a ter amplitudes de ordem de grandeza próxima do deslocamento descendente. Para velocidades superiores à velocidade crítica do troço 1, o valor máximo do deslocamento nos dois sentidos é praticamente igual, mais uma vez de acordo com o observado anteriormente.

Também é possível observar que os maiores deslocamentos descendentes e ascendentes no troço 1 ocorrem para as velocidades crítica do troço 1 (205.574 m/s) e a velocidade intermédia de 225 m/s, respectivamente, enquanto no troço 2 ocorrem ambos para a velocidade de 205.574 m/s, embora fosse de esperar que ocorressem para a velocidade de 244.470 m/s, uma vez que esta é a velocidade crítica do troço 2.

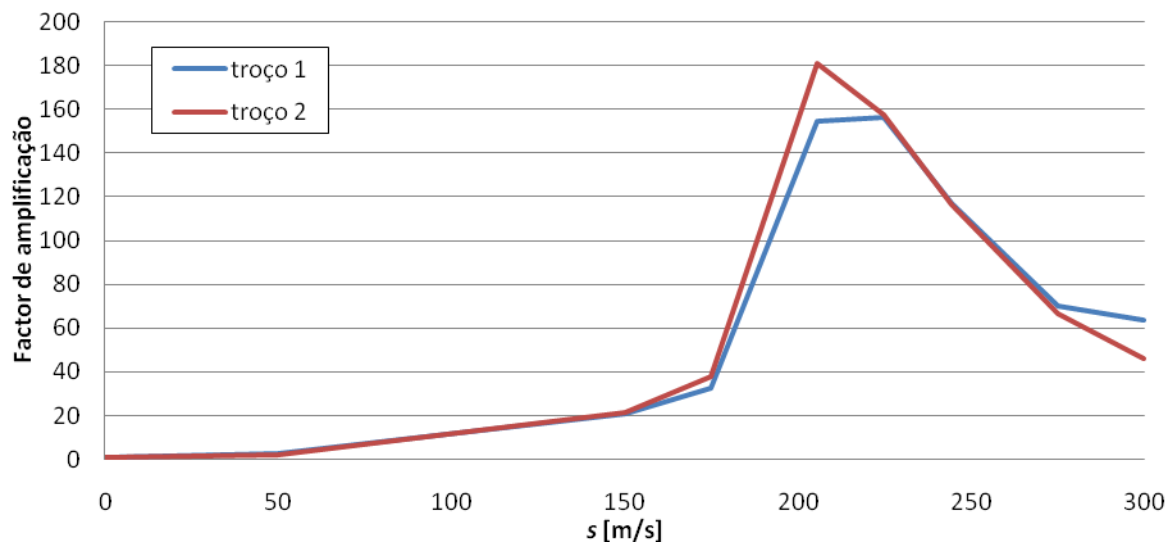
Embora os deslocamentos sejam suficientemente elevados para considerar que já não se pode considerar o comportamento linear elástico, é razoável assumir que os deslocamentos observados não são muito diferentes dos obtidos através de uma eventual análise não linear.

Os factores de amplificação para as várias velocidades estão representados graficamente nas figuras 4.15 e 4.16, que representam o factor de amplificação do deslocamento ascendente e descendente, respectivamente. Torna-se bastante claro que o troço 2 apresenta, para boa parte das velocidades, um maior factor de amplificação.

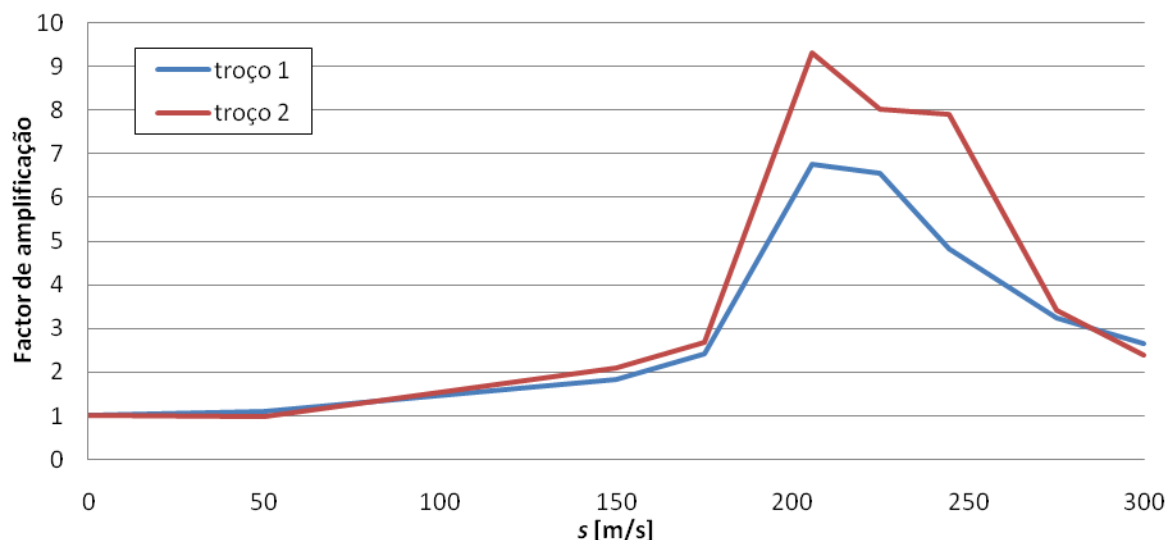
Ao representar graficamente os deslocamentos máximos para cada ponto independentemente do ponto de aplicação da carga (ver figuras 4.17 a 4.20), como foi feito para o caso estático, verifica-se que este comportamento inesperado por parte do troço 2 se deve à presença da descontinuidade, pois os deslocamentos elevados para as velocidades de 205.574 m/s e 225

#### 4. Viga descontínua sujeita a uma carga móvel

m/s ocorrem apenas junto a esta. Ao avançar ao longo do troço 2, o deslocamento máximo vai diminuindo consideravelmente para estas velocidades.



**Figura 4.15** • Factor de amplificação do deslocamento ascendente em ambos os troços



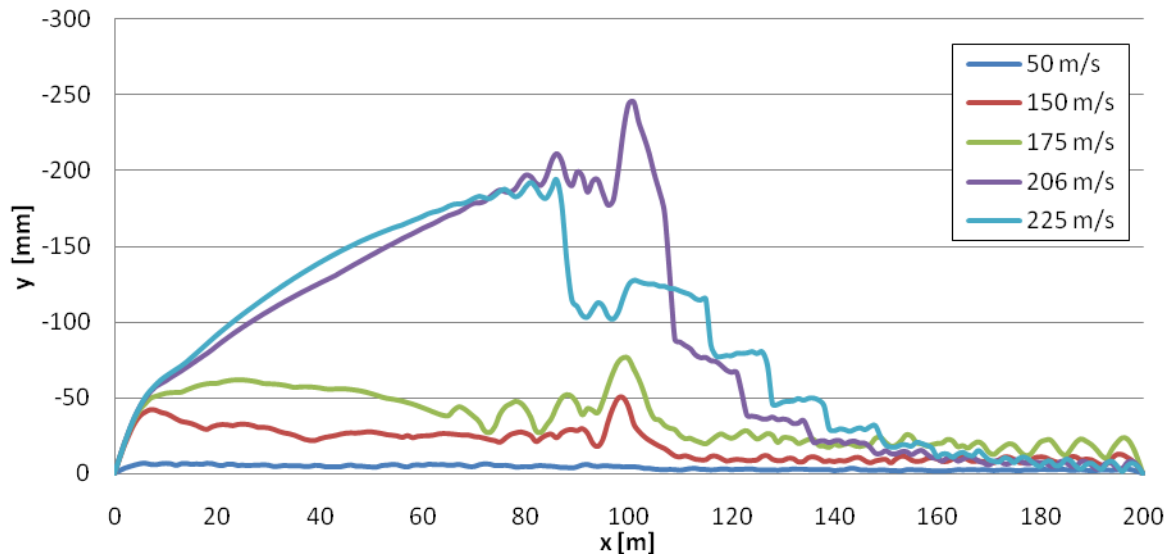
**Figura 4.16** • Factor de amplificação do deslocamento descendente em ambos os troços

Já para a velocidade crítica do troço 2, verifica-se um deslocamento elevado junto à descontinuidade, que depois baixa nos próximos metros, mas começa novamente a aumentar, atingindo valores muito mais elevados no fim da viga do que aqueles que se verificavam para velocidades inferiores. Este efeito também é notório para as velocidades super-críticas de 275 m/s e 300 m/s, mas com menor amplitude de deslocamentos.

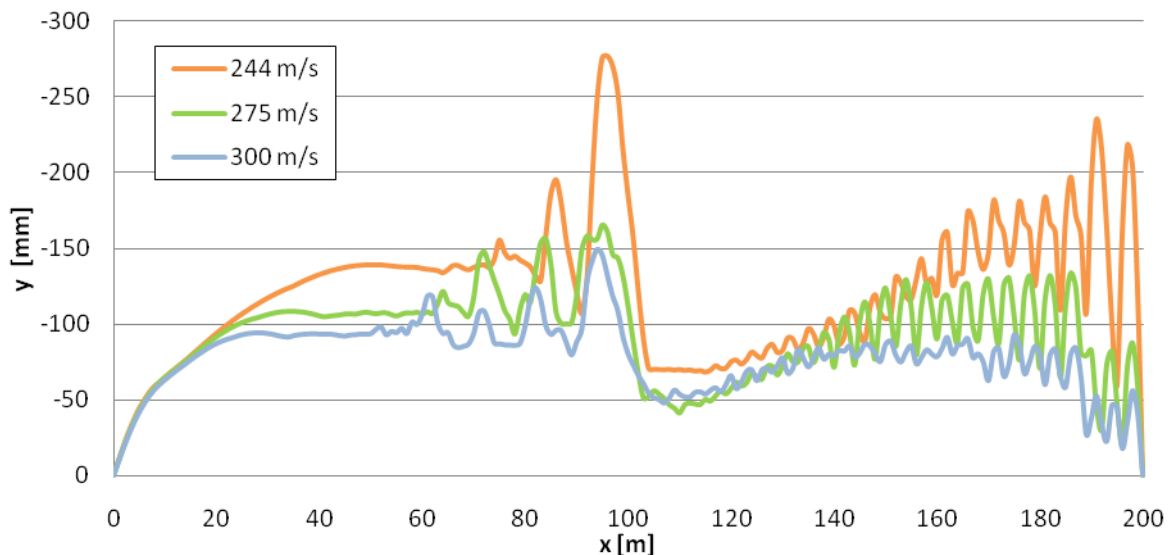
Outro fenómeno decorrente da presença da descontinuidade é o facto de os deslocamentos máximos descendentes no troço 1 se verificarem quando a carga está aplicada antes da descontinuidade para valores de velocidade inferiores à sua velocidade crítica, mas para velocidades superiores já ocorrem depois de a carga passar a descontinuidade.

No caso dos deslocamentos máximos ascendentes, isto só acontece para a velocidade sub-crítica de 50 m/s, embora para as duas velocidades seguintes a diferença entre os dois deslocamentos (antes e depois da passagem pela descontinuidade) não seja significativa.





**Figura 4.17** • Deslocamento ascendente máximo em cada ponto da viga para os primeiros cinco valores de velocidade

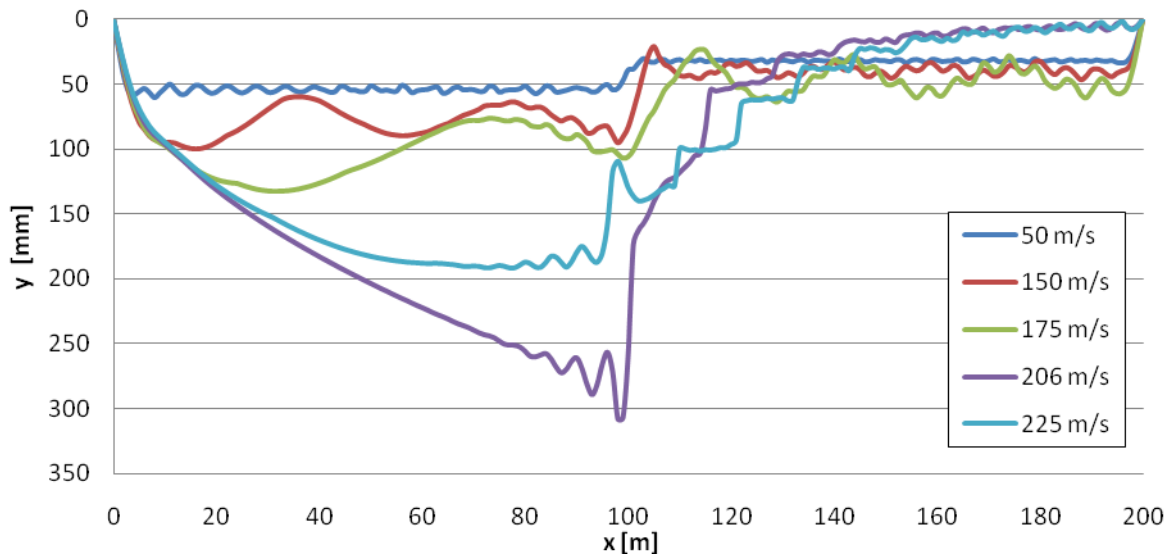


**Figura 4.18** • Deslocamento ascendente máximo em cada ponto da viga para os últimos três valores de velocidade

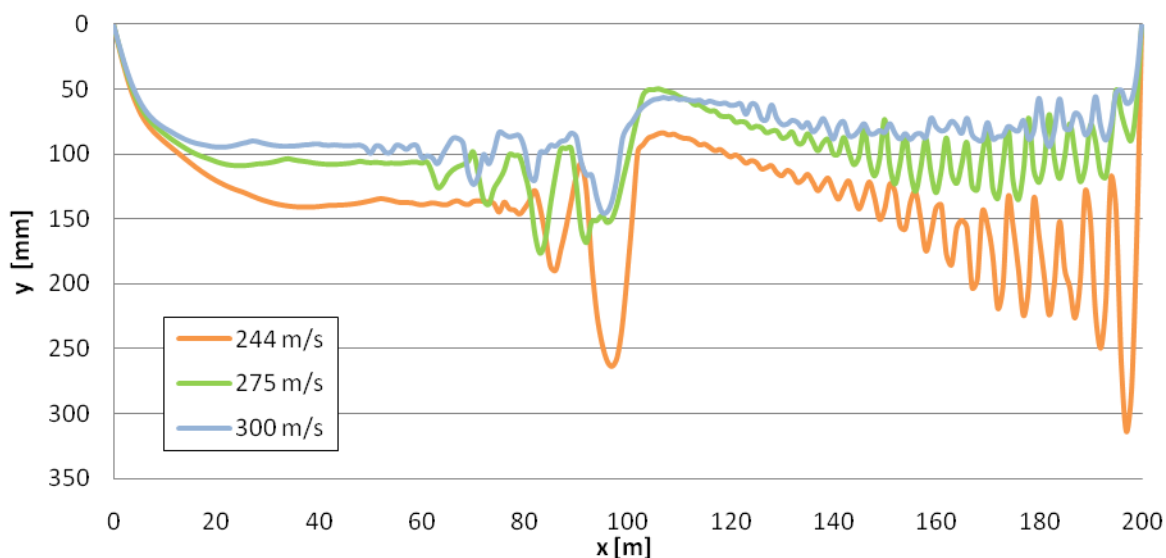
Ao observar uma representação sequencial ao longo do tempo dos deslocamentos (vulgo, uma animação), verifica-se que este efeito se deve à formação de novas ondas após a passagem da carga pela descontinuidade. Estas viajam a partir do ponto de descontinuidade para ambas as extremidades da viga, sobrepondo-se às vibrações devidas à passagem da carga móvel, e aumentando assim os deslocamentos transversais observados.

Outra fonte de inconsistências entre os valores esperados e os observados é a reflexão de ondas nos apoios. Enquanto no modelo infinito as ondas viajam sem impedimentos a partir do ponto de origem, seja este o ponto de aplicação da carga ou a descontinuidade, no caso de uma viga finita, estas reflectem-se nas extremidades, e voltam então para trás, sobrepondo-se à vibração original. Isto é especialmente notório nas figuras 4.18 e 4.20, onde os deslocamentos máximos junto ao apoio apresentam uma forma sinusoidal de grande amplitude e comprimento de onda reduzido.

#### 4. Viga descontínua sujeita a uma carga móvel



**Figura 4.19** • Deslocamento descendente máximo em cada ponto da viga para os primeiros cinco valores de velocidade



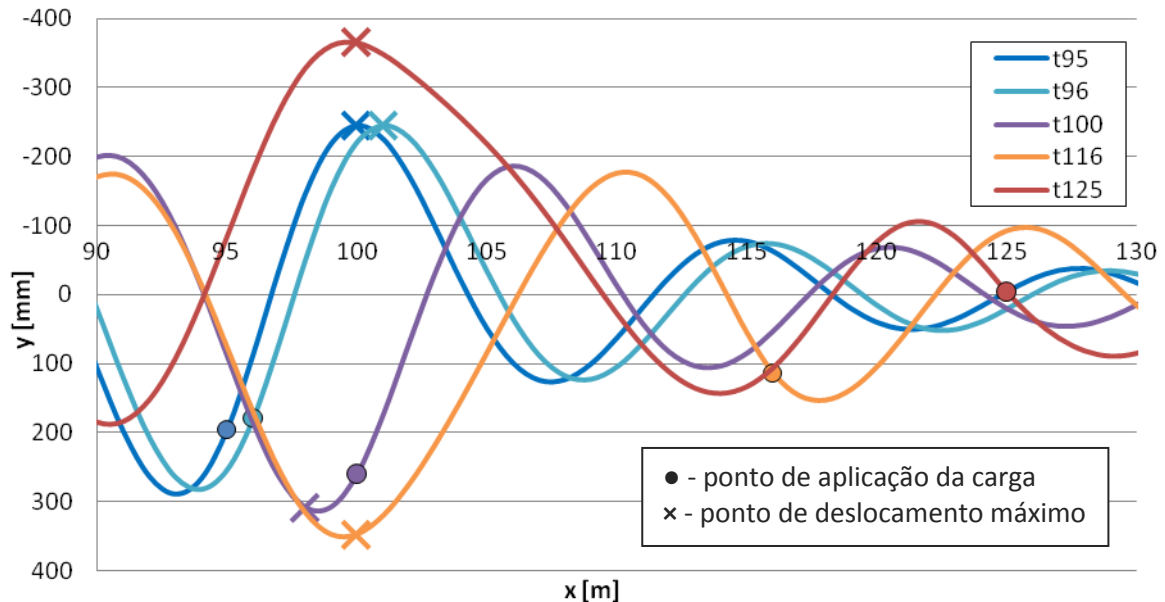
**Figura 4.20** • Deslocamento descendente máximo em cada ponto da viga para os últimos três valores de velocidade

As figuras 4.21 e 4.22 representam os deslocamentos em torno do ponto de descontinuidade para os instantes em que ocorrem os deslocamentos máximos em ambos os troços e antes e depois da passagem da carga, para a velocidade crítica do troço 1 e a velocidade intermédia de 225 m/s (alguns dos instantes para os quais ocorrem deslocamentos máximos foram omitidos para facilitar a leitura).

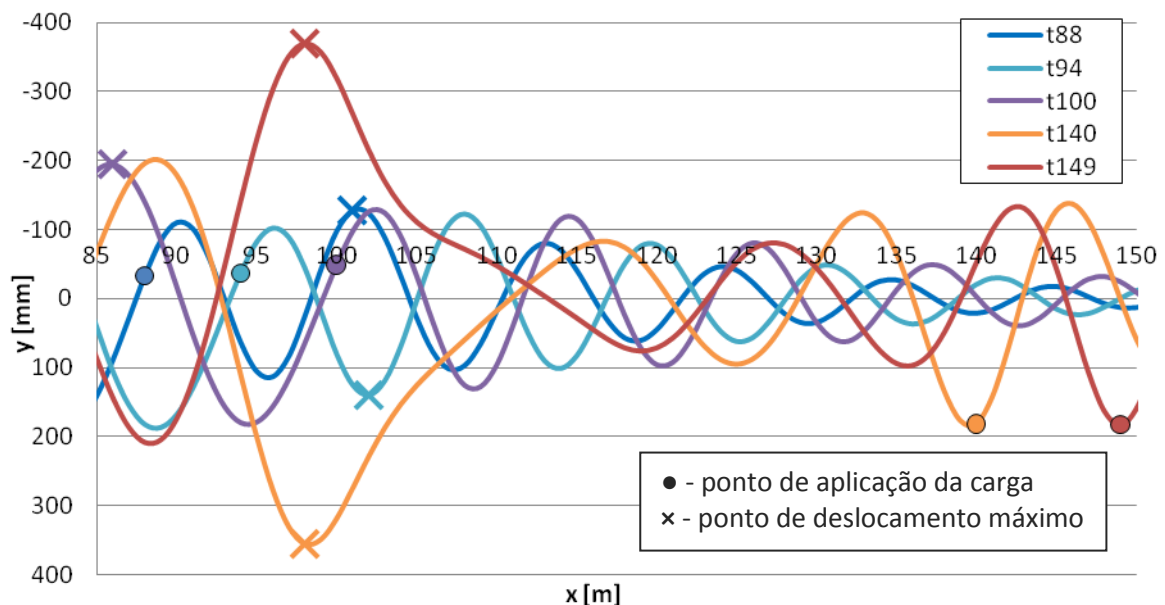
É fácil de ver que a amplitude dos deslocamentos no ponto de descontinuidade aumenta após a passagem da carga por ele, apesar do segundo troço apresentar maior rigidez, e portanto ser expectável que os deslocamentos sejam menores.

Também se pode observar, especialmente na figura 4.22, que a configuração deformada, que tem um aspecto sinusoidal antes da passagem da carga pelo ponto de descontinuidade, passa após esta passagem a ter perturbações na zona imediatamente depois da descontinuidade.

Estas perturbações, que surgem na animação como ondas sobrepostas à deformada original, são fruto do que se designa por radiação de transição, um fenómeno associado à mudança brusca nas propriedades de apoio da viga. Sabe-se que este é um fenómeno é comum a vários campos da física, ocorrendo não só para ondas elásticas como para ondas sonoras e electromagnéticas (Van Dalen *et al.* [15]).



**Figura 4.21** • Deslocamentos em torno do ponto de descontinuidade para os instantes em que ocorrem os deslocamentos máximos para a velocidade crítica do troço 1, 205.574 m/s



**Figura 4.22** • Deslocamentos em torno do ponto de descontinuidade para os instantes em que ocorrem os deslocamentos máximos para a velocidade intermédia de 225 m/s

Torna-se então importante diferenciar não só os efeitos da velocidade, como também os efeitos desta radiação. Para o efeito estudam-se duas vigas em semelhantes à viga descontínua até agora apresentada, com a excepção de serem ambas contínuas, uma com rigidez de fundação igual à do troço 1, e a outra com rigidez de fundação igual à do troço 2,  $k_1 = 500 \text{ kN/m}^2$  e  $k_2 = 1\,000 \text{ kN/m}^2$ , respectivamente.

#### 4. Viga descontínua sujeita a uma carga móvel

---

Como se viu em 2.4, o modo de vibração de uma viga bi-apoiada contínua é dado por:

$$v_i(x) = \sin(i\pi x/L), \quad (4.38)$$

ao qual se aplica a norma referida em (3.113), que neste caso é sempre igual independentemente do modo:

$$N_i(x) = \sqrt{m \int_0^L (\sin(i\pi x/L))^2 dx} = \sqrt{\frac{m L (-\cos(i\pi) \sin(i\pi) + i\pi)}{2i\pi}} = \sqrt{\frac{m L}{2}}. \quad (4.39)$$

Tendo isto em conta, e o facto da frequência natural de vibração não amortecida para um dado modo  $i$  ser dada por

$$\omega_i = \sqrt{\frac{(i\pi)^4 EI}{L^4 m} + \frac{k}{m}},$$

obtém-se uma expressão muito mais simples para o deslocamento generalizado:

$$f_i(t) = \frac{P}{\omega_i} \int_{\tau=0}^t \frac{\sin(i\pi s\tau/L)}{\sqrt{m L/2}} \sin(\omega_i(t-\tau)) d\tau = \frac{L(L\omega_i \sin(i\pi st/L) - i\pi s \sin(\omega_i t))}{\sqrt{m L/2} (L^2 \omega_i^3 - i^2 \pi^2 s^2 \omega_i^3)}. \quad (4.40)$$

Tem-se então

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2 \sin(i\pi x/L) (L\omega_i \sin(i\pi st/L) - i\pi s \sin(\omega_i t))}{m (L^2 \omega_i^3 - i^2 \pi^2 s^2 \omega_i^3)}. \quad (4.41)$$

Será então a diferença entre as frequências naturais de vibração não amortecida que irá ditar a diferença no comportamento das duas vigas contínuas com rigidez de fundação  $k_1$  e  $k_2$ .

Tal como no caso da viga descontínua empregaram-se 300 modos na sobreposição modal. Em vez de se apresentarem os resultados directamente para as vigas simplesmente apoiadas, optou-se por apresentar apenas a diferença entre estes e o caso da viga descontínua.

Para efeitos de comparação, os deslocamentos da primeira metade (de  $x = 0$  a  $x = 100$ ) da viga contínua com rigidez de fundação  $k_1$  foram subtraídos ao troço 1 da viga descontínua, e os deslocamentos da segunda metade (de  $x = 100$  a  $x = 200$ ) da viga contínua com rigidez de fundação  $k_2$  foram subtraídos ao troço 2 da viga descontínua. Os deslocamentos resultantes são então apenas os devidos à presença da descontinuidade e dos apoios, pelo que contabilizam apenas o efeito da radiação originada na descontinuidade e reflexão desta nas extremidades. Nos quadros 4.10 a 4.17 resumem os deslocamentos máximos ascendentes e descendentes resultantes.

**Quadro 4.10**

Deslocamentos máximos na viga devido à radiação de transição para a velocidade sub-crítica de 50 m/s

	$s \leq 100$		$s \geq 100$		absoluto	
	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2
$y_{MAX}^-$ [mm]	-15.4296	-4.3371	-16.8245	-3.7588	-16.8245	-4.3371
$x$ [m]	100	100	100	100	100	100
$s \ t$ [m]	100	35	103	195	103	35
$y_{MAX}^+$ [mm]	10.4141	14.7693	6.6448	8.3977	10.4141	14.7693
$x$ [m]	8	100	40	100	8	100
$s \ t$ [m]	11	97	159	100	11	97

**Quadro 4.11**

Deslocamentos máximos na viga devido à radiação de transição para a velocidade sub-crítica de 150 m/s

	$s \leq 100$		$s \geq 100$		absoluto	
	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2
$y_{MAX}^-$ [mm]	-9.1496	-21.0870	-48.1783	-46.9106	-48.1783	-46.9106
$x$ [m]	100	101	100	100	100	100
$s \ t$ [m]	100	93	104	105	104	105
$y_{MAX}^+$ [mm]	14.1473	49.0029	40.1361	45.0360	40.1361	49.0029
$x$ [m]	100	100	100	100	100	100
$s \ t$ [m]	97	99	110	110	110	110

**Quadro 4.12**

Deslocamentos máximos na viga devido à radiação de transição para a velocidade sub-crítica de 175 m/s

	$s \leq 100$		$s \geq 100$		absoluto	
	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2
$y_{MAX}^-$ [mm]	-9.6775	-35.8568	-61.0257	-73.8972	-61.0257	-73.8972
$x$ [m]	100	103	100	100	100	100
$s \ t$ [m]	84	96	120	121	120	121
$y_{MAX}^+$ [mm]	9.9829	63.0352	62.7479	69.2884	62.7479	69.2884
$x$ [m]	100	100	100	100	100	100
$s \ t$ [m]	90	100	113	128	113	128

**Quadro 4.13**

Deslocamentos máximos na viga devido à radiação de transição para a velocidade crítica do troço 1, 205.574 m/s

	$s \leq 100$		$s \geq 100$		absoluto	
	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2
$y_{MAX}^-$ [mm]	-48.8517	-231.6698	-262.6069	-365.6204	-262.6069	-365.6204
$x$ [m]	100	101	100	100	100	100
$s \ t$ [m]	95	96	140	109	140	109
$y_{MAX}^+$ [mm]	62.2629	196.3816	272.3473	375.2803	272.3473	375.2803
$x$ [m]	100	100	100	100	100	100
$s \ t$ [m]	100	100	132	117	132	117

#### 4. Viga descontínua sujeita a uma carga móvel

**Quadro 4.14**

Deslocamentos máximos na viga devido à radiação de transição para a velocidade intermédia de 225 m/s

	$s \leq 100$		$s \geq 100$		absoluto	
	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2
$y_{MAX}^-$ [mm]	-17.0314	-182.4192	-269.3167	-318.0503	-269.3167	-318.0503
$x$ [m]	100	102	100	100	100	100
$s \ t$ [m]	99	100	148	131	148	131
$y_{MAX}^+$ [mm]	17.7094	174.4678	268.0048	331.9258	268.0048	331.9258
$x$ [m]	100	102	100	100	100	100
$s \ t$ [m]	93	94	157	140	157	140

**Quadro 4.15**

Deslocamentos máximos na viga devido à radiação de transição para a velocidade crítica do troço 2, 244.470 m/s

	$s \leq 100$		$s \geq 100$		absoluto	
	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2
$y_{MAX}^-$ [mm]	-5.0479	-124.4388	-207.2538	-223.5856	-207.2538	-223.5856
$x$ [m]	100	102	100	100	100	100
$s \ t$ [m]	80	92	197	115	197	115
$y_{MAX}^+$ [mm]	4.6412	127.5564	177.0036	197.8256	177.0036	197.8256
$x$ [m]	100	102	98	100	98	100
$s \ t$ [m]	85	87	186	189	186	189

**Quadro 4.16**

Deslocamentos máximos na viga devido à radiação de transição para a velocidade super-crítica de 275 m/s

	$s \leq 100$		$s \geq 100$		absoluto	
	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2
$y_{MAX}^-$ [mm]	-2.1421	-62.8031	-124.6485	-202.0315	-124.6485	-202.0315
$x$ [m]	100	100	100	100	100	100
$s \ t$ [m]	91	76	188	139	188	139
$y_{MAX}^+$ [mm]	1.7211	59.2206	133.0626	192.5022	133.0626	192.5022
$x$ [m]	100	112	100	100	100	100
$s \ t$ [m]	95	84	200	130	200	130

**Quadro 4.17**

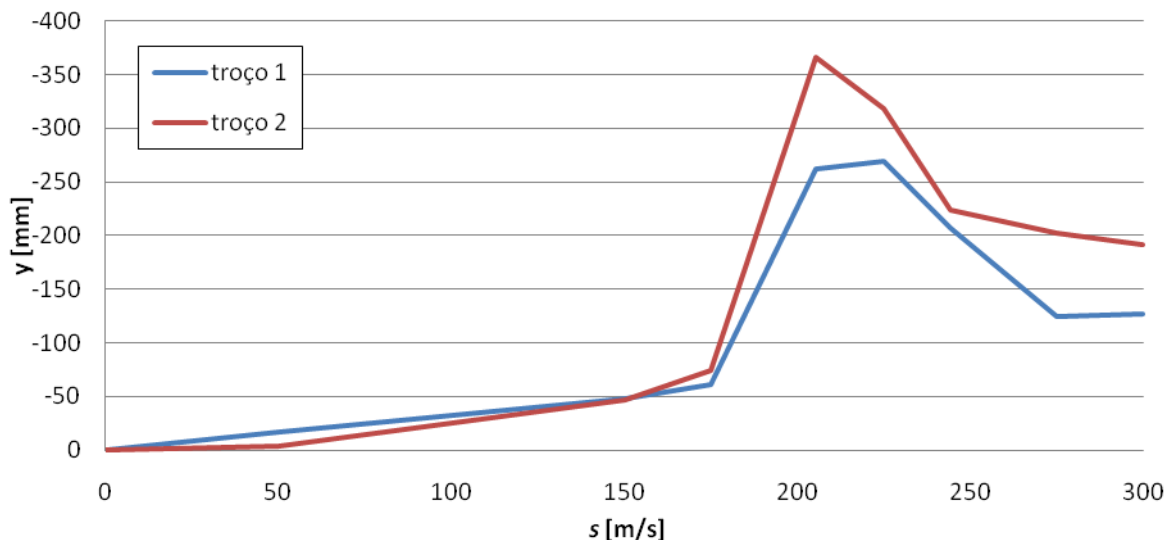
Deslocamentos máximos na viga devido à radiação de transição para a velocidade super-crítica de 300 m/s

	$s \leq 100$		$s \geq 100$		absoluto	
	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2
$y_{MAX}^-$ [mm]	-1.4409	-77.0835	-127.4623	-191.9379	-127.4623	-191.9379
$x$ [m]	100	123	99	125	99	125
$s \ t$ [m]	99	100	194	197	194	197
$y_{MAX}^+$ [mm]	0.7423	73.8812	127.4588	193.6868	127.4588	193.6868
$x$ [m]	100	112	99	127	99	127
$s \ t$ [m]	89	93	182	191	182	191

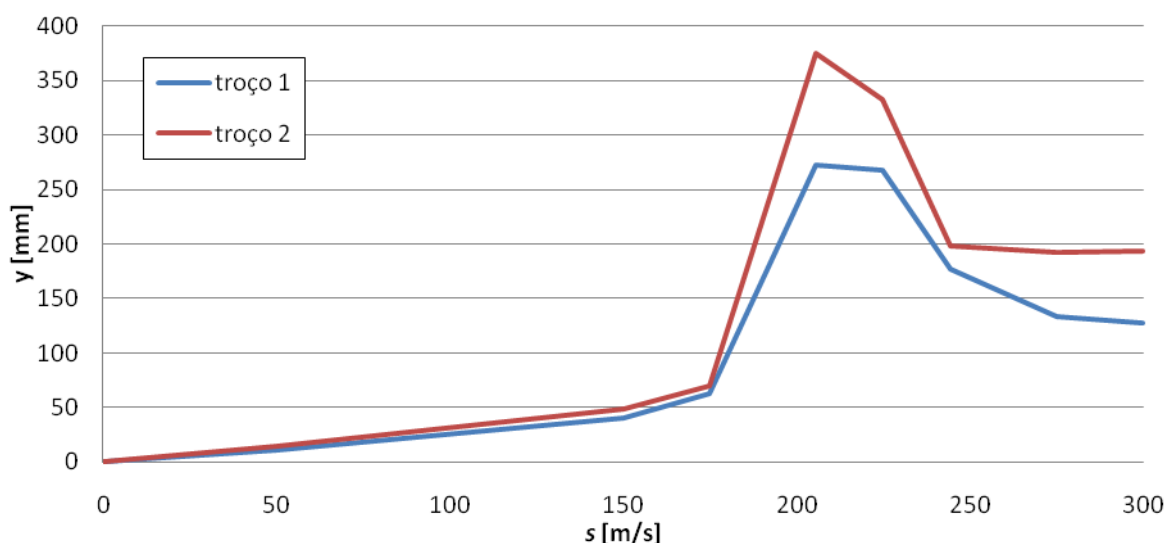
Uma das primeiras conclusões a que é possível chegar é que, para uma velocidade igual ou superior a 150 m/s, os valores máximos de deslocamento, quer ascendente quer descendente, ocorrem depois da passagem da carga pelo ponto de descontinuidade. Isto reforça a ideia de que as perturbações verificadas se devem à transição brusca da rigidez de fundação.

Outro facto a salientar é a ocorrência de maiores deslocamentos máximos no troço 2 que no 1 (ver também as figuras 4.23 e 4.24), enquanto que para os deslocamentos totais é frequente o troço 1 ter deslocamentos superiores aos do troço 2, especialmente para as velocidades baixas. Parece razoável afirmar então que o troço 2 é mais perturbado pela radiação de transição que o troço 1 devido à passagem da carga por ele ocorrer já depois desta ter passado o ponto de descontinuidade.

Uma vez que neste caso não existe um caso estático para comparação (a radiação associada à descontinuidade é um fenómeno dinâmico), apresenta-se o deslocamento máximo ascendente e descendente em cada troço em função da velocidade nas figuras 4.23 e 4.24. Como se pode observar, os maiores deslocamentos encontram-se associados à velocidade crítica do troço 1, além de ser notória a maior amplitude de deslocamentos no troço 2.



**Figura 4.23** • Deslocamento máximo ascendente devido à radiação de transição em ambos os troços

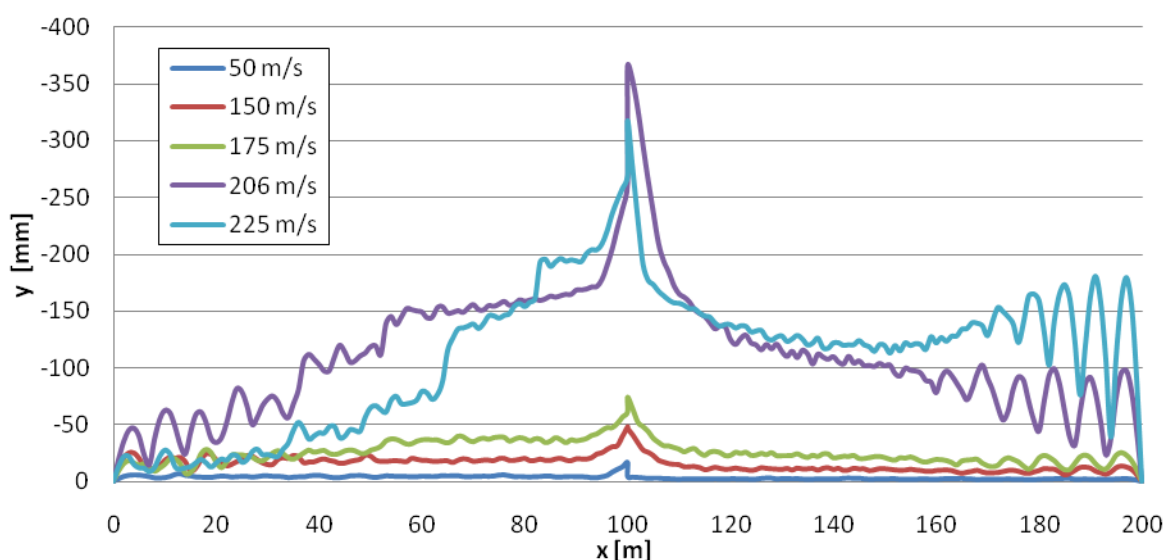


**Figura 4.24** • Deslocamento máximo descendente devido à radiação de transição em ambos os troços

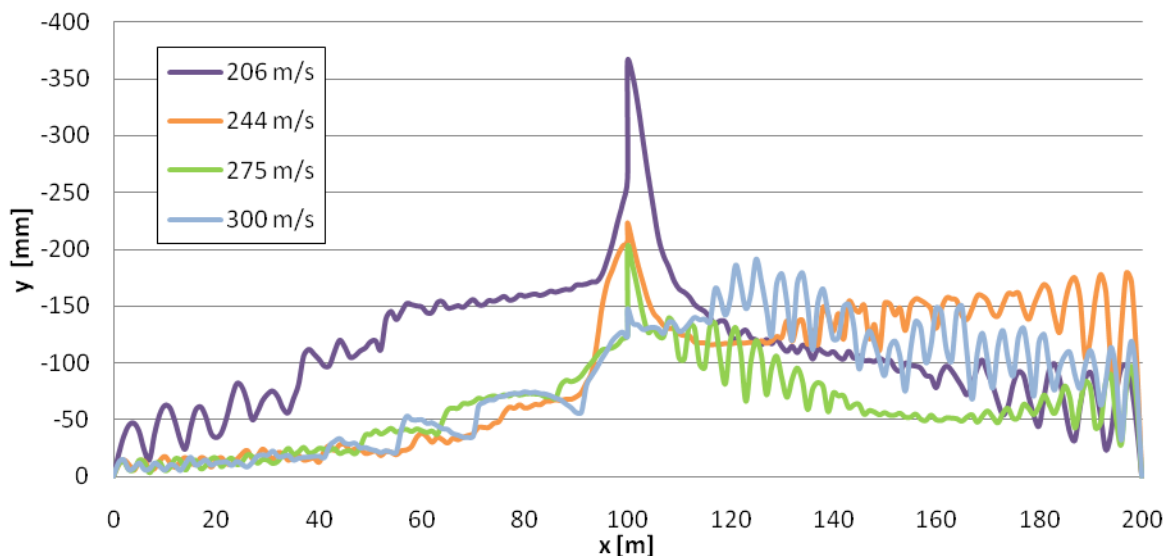
#### 4. Viga descontínua sujeita a uma carga móvel

Embora a forma geral destes gráficos seja muito semelhante à dos presentes nas figuras 4.15 e 4.16, é importante notar que esses mostram o factor de amplificação dos deslocamentos máximos, e não os deslocamentos absolutos, pelo que não será correcto estabelecer analogias no que toca à diferença dos troços. A conclusão a tirar é que os maiores deslocamentos devidos à radiação de transição ocorrem para as mesmas velocidades em que se verificam os maiores deslocamentos totais.

Um pormenor interessante é o facto de o deslocamento máximo diminuir pouco para as velocidades superiores à velocidade crítica do troço 2, ao contrário do que acontece nos deslocamentos totais, particularmente no caso dos deslocamentos descendentes do troço 2. Isto é visível nas figuras 4.25 a 4.28, onde se representam os deslocamentos máximos para cada ponto. É assim possível fazer uma comparação mais directa com as figuras 4.17 a 4.20. Os deslocamentos máximos devidos à velocidade crítica do troço 1 (206 m/s) figuram em todos os gráficos para efeitos de comparação.

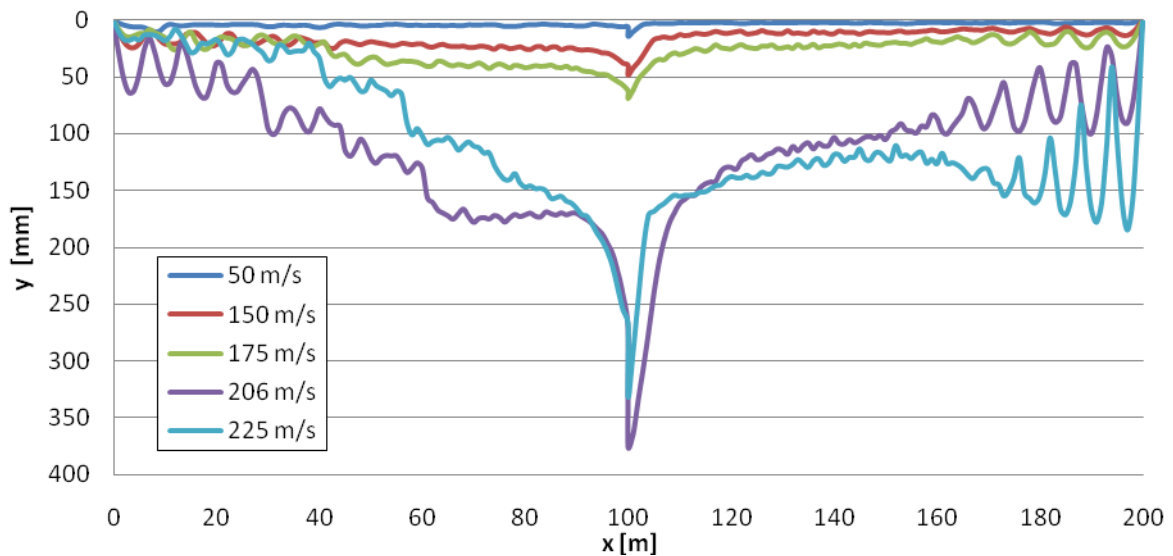


**Figura 4.25** • Deslocamento ascendente máximo devido à radiação de transição em cada ponto da viga para os primeiros cinco valores de velocidade

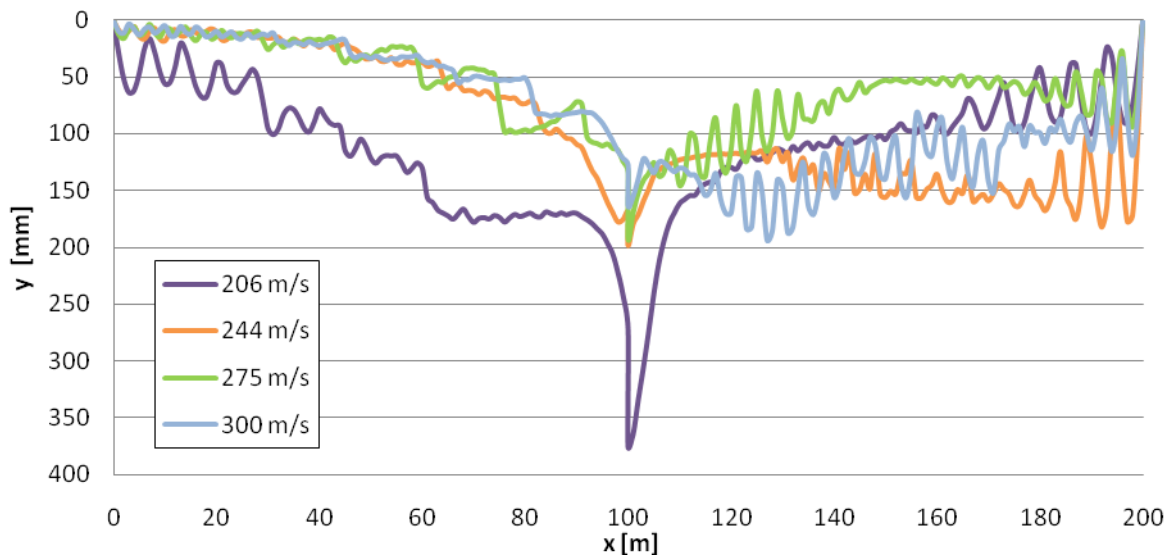


**Figura 4.26** • Deslocamento ascendente máximo devido à radiação de transição em cada ponto da viga para os últimos três valores de velocidade e a velocidade crítica do troço 1





**Figura 4.27** • Deslocamento descendente máximo devido à radiação de transição em cada ponto da viga para os primeiros cinco valores de velocidade



**Figura 4.28** • Deslocamento descendente máximo devido à radiação de transição em cada ponto da viga para os últimos três valores de velocidade e a velocidade crítica do troço 1

Não só se comprova o facto de os maiores deslocamentos ocorrerem no troço 2, como se observa que as vibrações devidas à radiação de transição têm maior amplitude junto à descontinuidade, e vão diminuindo ao longo de ambos os troços (embora perto do apoio do troço 2 voltem a aumentar), como se deste ponto partissem ondas que se vão atenuando à medida que viajam para as extremidades.

Para as velocidades mais elevadas este efeito é menos notório, e no caso da velocidade supercrítica de 300 m/s, o máximo deslocamento junto à descontinuidade é superado em grande parte do troço 2. Tendo em conta o que já foi observado nas figuras 4.19 e 4.20, é plausível que a radiação de transição seja mais afectada pelas velocidades elevadas que os deslocamentos totais são.

#### 4. Viga descontínua sujeita a uma carga móvel

Quer isto dizer que, enquanto a amplitude das vibrações devido à passagem da carga móvel depende muito da proximidade da velocidade desta às velocidades críticas dos troços, a amplitude da radiação de transição está mais próxima de ser uma função injectiva do valor da velocidade a que a carga se desloca. Naturalmente que os casos analisados não são suficientes para comprovar esta relação, apenas apontam nesse sentido.

Apesar de os dados acima mencionados se referirem às vibrações induzidas pela radiação, não transmitem uma ideia da contribuição destas para os deslocamentos totais. Por essa razão, apresenta-se nos quadros 4.18 e 4.19 uma comparação entre os deslocamentos máximos obtidos para as vigas contínuas e os obtidos para a viga descontínua. Da mesma forma, as figuras 4.29 e 4.30 apresentam a diferença entre os dois casos.

##### Quadro 4.18

Variação dos deslocamentos ascendentes máximos na viga descontínua devido à radiação de transição

viga	contínua		descontínua		$ y_C - y_D $ [mm]	
	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2
50	-6.70	-2.90	-6.70	-4.48	0.00	1.58
150	-41.95	-9.68	-49.66	-43.61	7.71	33.93
175	-62.05	-14.67	-76.84	-76.11	14.80	61.44
205.574	-220.71	-27.85	-365.19	-365.19	144.48	337.34
225	-188.25	-74.16	-368.91	-318.58	180.65	244.42
244.470	-166.21	-381.76	-277.09	-235.29	110.88	-146.47
275	-138.05	-142.74	-165.73	-133.99	27.67	-8.75
300	-115.74	-142.74	-149.80	-93.03	34.05	-49.71

##### Quadro 4.19

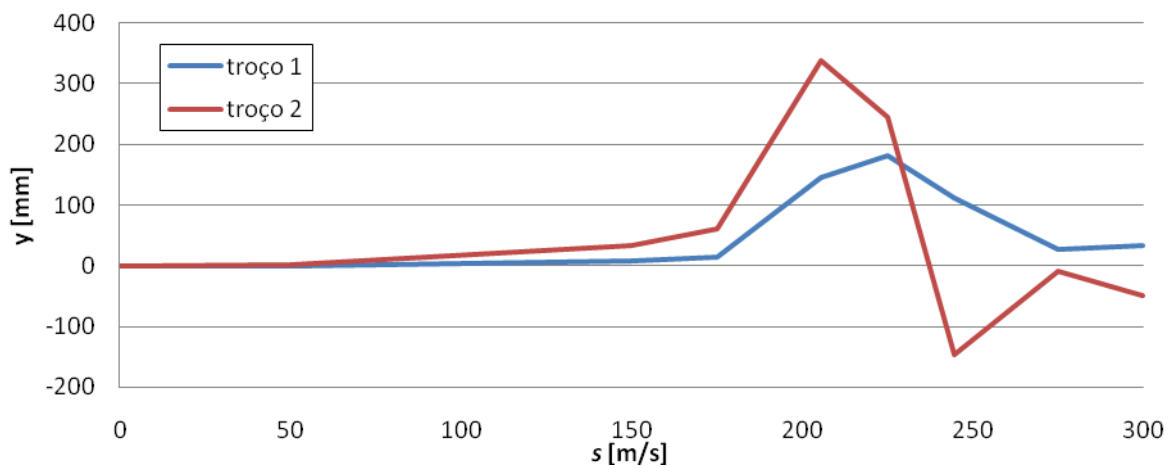
Variação dos deslocamentos descendentes máximos na viga descontínua devido à radiação de transição

viga	contínua		descontínua		$ y_C - y_D $ [mm]	
	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2
50	60.32	33.96	60.32	38.98	0.00	5.02
150	100.44	48.76	100.44	83.72	0.00	34.95
175	132.76	52.12	132.76	106.14	0.00	54.02
205.574	284.54	70.06	369.87	369.87	85.33	299.81
225	190.56	140.81	358.36	318.28	167.80	177.47
244.470	165.62	458.28	263.63	313.93	98.01	-144.36
275	136.71	137.86	176.90	135.32	40.18	-2.54
300	111.68	137.86	145.06	94.34	33.38	-43.53

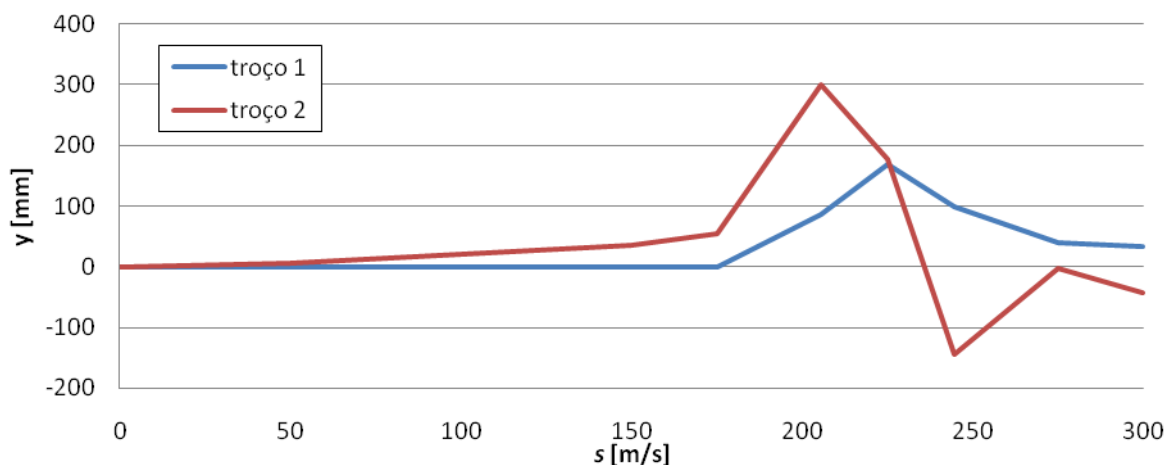
Como se pode ver, a diferença dos deslocamentos máximos no caso do troço 1 começa por ser inexistente, e depois vai aumentando, até que atinge um máximo para a velocidade intermédia de 225 m/s, valor após o qual volta a descer. No caso do troço 2, começa desde as velocidades mais baixas por apresentar uma diferença considerável entre o caso contínuo e descontínuo, acabando por atingir uma diferença muito elevada para a velocidade crítica do troço 1, após a qual diminui, acabando por se tornar negativa. Quer isto dizer que, para as velocidades mais elevadas, a radiação de transição aparenta atenuar a amplitude das vibrações no troço 2, em vez de as aumentar.

Mais uma vez, esta afirmação é feita com algumas reservas. Neste caso verifica-se que a amplitude das vibrações no troço 2 sem a descontinuidade é maior que no caso em que ela

está presente. Seria necessário considerar outra relação entre a rigidez de fundação de um troço e do outro (neste caso, a rigidez do troço 2 é o dobro da do troço 1).



**Figura 4.29** • Variação dos deslocamentos ascendentes máximos na viga descontínua devido à radiação de transição



**Figura 4.30** • Variação dos deslocamentos descendentes máximos na viga descontínua devido à radiação de transição

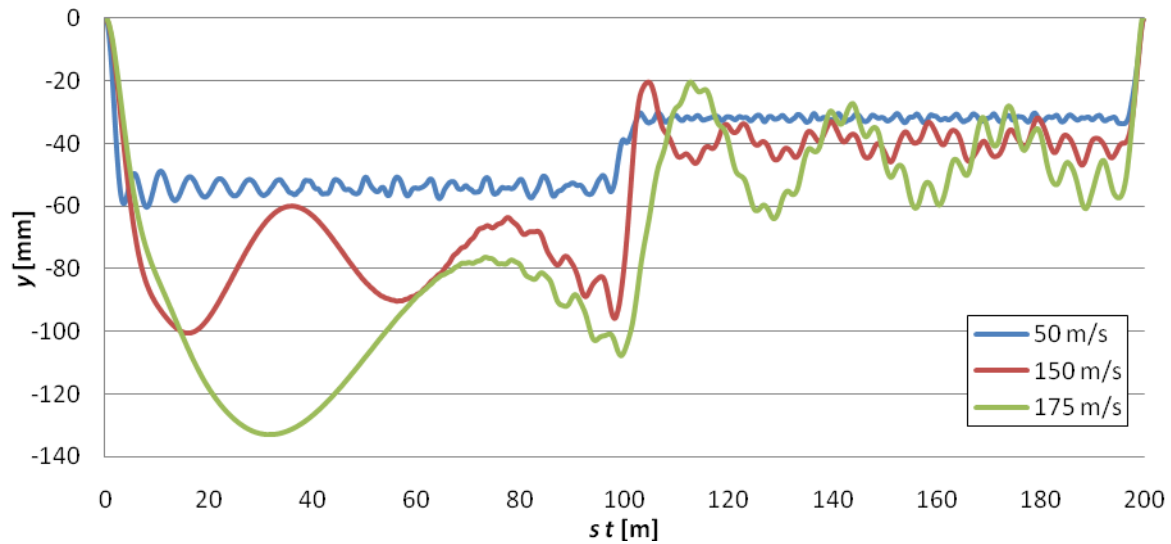
Embora esta análise dos deslocamentos totais e dos deslocamentos devidos à radiação de transição permita ter uma boa ideia do comportamento da viga, deixa de fora um factor importante para a segurança e conforto dos comboios de alta velocidade: o movimento vertical descrito pelo próprio veículo.

Nas figuras 4.31 a 4.33 apresenta-se esse deslocamento vertical, que consiste simplesmente no deslocamento da viga no ponto em que está aplicada a carga ao longo do tempo.

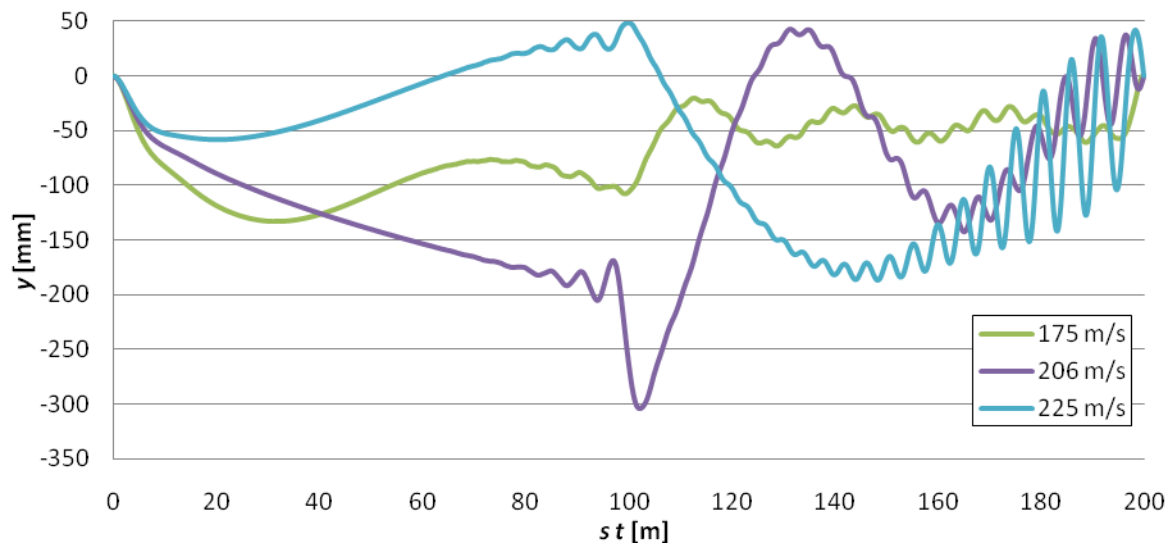
Naturalmente que o deslocamento efectivo é pouco relevante, mas a variação brusca deste pode representar problemas de segurança e conforto. Dadas as simplificações consideradas não é possível tirar conclusões definitivas sobre o efeito da radiação nestes campos.

Como se pode ver, a oscilação aumenta com a velocidade, tornando-se pronunciada para a velocidade de 205.574 m/s, e continua a aumentar até aos 244.470 m/s, velocidade após a qual atenua. Note-se que mesmo para a velocidade de 300 m/s, já afastada das velocidades críticas, continua a estar presente uma oscilação de frequência e amplitude elevadas.

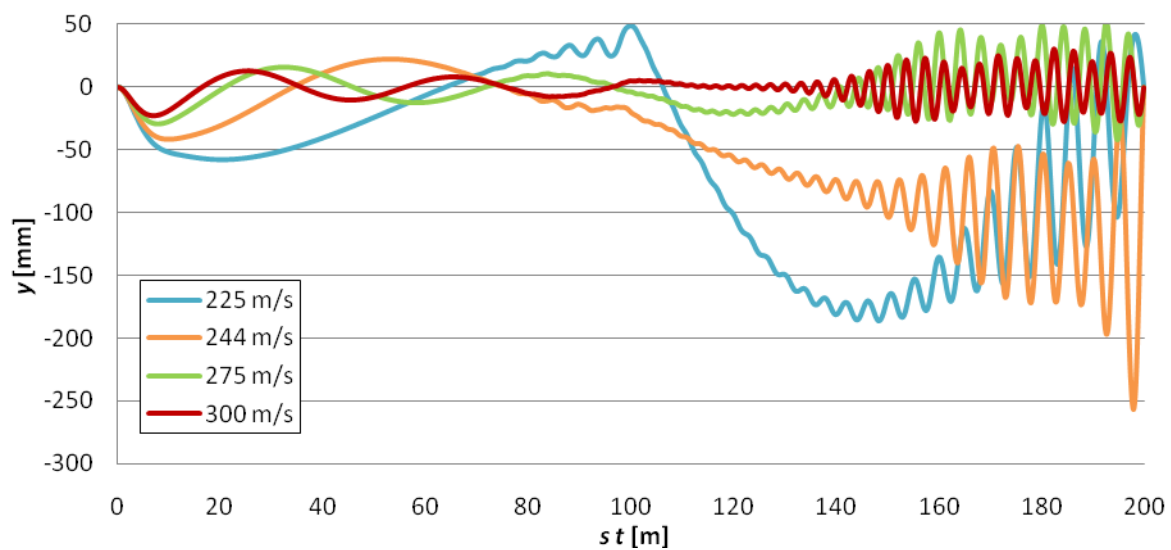
#### 4. Viga descontínua sujeita a uma carga móvel



**Figura 4.31** • Deslocamento vertical no ponto de aplicação da carga para as velocidades de 50, 150 e 175 m/s



**Figura 4.32** • Deslocamento vertical no ponto de aplicação da carga para velocidades de 175, 205.574 e 225 m/s



**Figura 4.33** • Deslocamento vertical no ponto de aplicação da carga para 225, 244.740, 275 e 300 m/s

### Solução para a carga móvel em sentido inverso

Passa-se então a considerar uma hipótese alternativa, em que a carga se desloca da direita para a esquerda. Designa-se este sentido de deslocamento como o sentido 2, e o original como sentido 1.

Em vez de redefinir a função de carga e obter nova solução, pode-se antes trocar a rigidez de fundação dos troços (isto é, o primeiro troço passa a ter rigidez  $k_2$  e o segundo troço rigidez  $k_1$ ). Uma vez que, na prática, se está a considerar um caso simétrico ao anterior, as frequências naturais de vibração não amortecida são forçosamente as mesmas, e os modos de vibração simétricos.

Para definir estes modos de vibração simétricos basta calcular a constante  $\lambda$  de cada troço com a nova rigidez de fundação (o que significa que o anterior  $\lambda_2$  passa a ser associado ao primeiro troço, e o  $\lambda_1$  ao segundo), e trocar o sinal da rotação no ponto de descontinuidade nas constantes de integração (3.104) a (3.111).

Obtém-se então o deslocamento generalizado segundo (4.29), e chega-se à solução sem ter de deduzir novas expressões ou resolver mais equações de equilíbrio dinâmico. É necessário ter em conta que a solução obtida é simétrica daquela que se pretendia (por exemplo,  $y(50,t) = y^*(150,t)$ , em que  $y^*(x,t)$  designa a deformada obtida pelo processo atrás descrito e  $y(x,t)$  a deformada que se pretende obter).

Uma vez que na ausência de factores dinâmicos, os resultados da solução estática são os mesmos independentemente do sentido em que se desloca a carga, passa-se directamente à apresentação dos resultados obtidos para o caso dinâmico (quadros 4.20 a 4.27). Note-se apenas que neste caso, quando  $st < 100$ , a carga está no troço 2, antes de chegar à descontinuidade, e quando  $st > 100$  está no troço 1, depois de ter passado a descontinuidade.

**Quadro 4.20**

Deslocamentos máximos na viga para o sentido 2 e velocidade sub-crítica de 50 m/s

	$st \leq 100$		$st \geq 100$		absoluto		amplificação	
	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2
$y_{\text{MAX}}^+ [\text{mm}]$	-3.1335	-3.6249	-3.7370	-3.5604	-3.7370	-3.6249	1.58	1.80
$x [\text{m}]$	97	187	83	105	83	187		
$st [\text{m}]$	95	5	127	106	127	5		
$y_{\text{MAX}}^- [\text{mm}]$	40.9945	40.9945	56.9017	40.9945	56.9017	40.9945	1.04	1.03
$x [\text{m}]$	100	100	5	100	5	100		
$st [\text{m}]$	100	100	195	100	195	100		

**Quadro 4.21**

Deslocamentos máximos na viga para o sentido 2 e velocidade sub-crítica de 150 m/s

	$st \leq 100$		$st \geq 100$		absoluto		amplificação	
	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2
$y_{\text{MAX}}^+ [\text{mm}]$	-10.0883	-17.6071	-30.4501	-15.2691	-30.4501	-17.6071	12.89	8.72
$x [\text{m}]$	95	195	91	100	91	195		
$st [\text{m}]$	97	12	117	111	117	12		
$y_{\text{MAX}}^- [\text{mm}]$	40.7609	52.2555	98.8409	40.7609	98.8409	52.2555	1.81	1.32
$x [\text{m}]$	100	193	4	100	4	193		
$st [\text{m}]$	100	7	196	100	196	7		

#### 4. Viga descontínua sujeita a uma carga móvel

##### Quadro 4.22

Deslocamentos máximos na viga para o sentido 2 e velocidade sub-crítica de 175 m/s

	$s \leq 100$		$s \geq 100$		absoluto		amplificação	
	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2
$y_{MAX}^-$ [mm]	-12.4232	-23.8102	-51.1526	-11.3489	-51.1526	-23.8102	21.65	11.79
$x$ [m]	95	193	76	100	76	193		
$s \ t$ [m]	99	14	132	113	132	14		
$y_{MAX}^+$ [mm]	46.7563	58.1908	127.6294	47.5494	127.6294	58.1908	2.33	1.47
$x$ [m]	100	187	4	100	4	187		
$s \ t$ [m]	100	13	197	101	197	13		

##### Quadro 4.23

Deslocamentos máximos na viga para o sentido 2 e velocidade crítica do troço 1, 205.574 m/s

	$s \leq 100$		$s \geq 100$		absoluto		amplificação	
	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2
$y_{MAX}^-$ [mm]	-30.5876	-34.8594	-338.4801	-27.1041	-338.4801	-34.8594	143.28	17.27
$x$ [m]	94	183	11	100	11	183		
$s \ t$ [m]	100	24	199	115	199	24		
$y_{MAX}^+$ [mm]	59.6818	76.4589	451.4618	59.6818	451.4618	76.4589	8.26	1.93
$x$ [m]	100	175	3	100	3	175		
$s \ t$ [m]	100	25	198	100	198	25		

##### Quadro 4.24

Deslocamentos máximos na viga para o sentido 2 e velocidade intermédia de 225 m/s

	$s \leq 100$		$s \geq 100$		absoluto		amplificação	
	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2
$y_{MAX}^-$ [mm]	-36.7342	-58.6688	-309.7076	-31.9114	-309.7076	-58.6688	131.10	29.06
$x$ [m]	93	150	17	104	17	150		
$s \ t$ [m]	100	56	198	101	198	56		
$y_{MAX}^+$ [mm]	64.3931	106.4115	312.0920	64.3931	312.0920	106.4115	5.71	2.68
$x$ [m]	100	147	9	100	9	147		
$s \ t$ [m]	100	53	196	100	196	53		

##### Quadro 4.25

Deslocamentos máximos na viga para o sentido 2 e velocidade crítica do troço 2, 244.470 m/s

	$s \leq 100$		$s \geq 100$		absoluto		amplificação	
	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2
$y_{MAX}^-$ [mm]	-127.6458	-139.5643	-310.0772	-147.1758	-310.0772	-147.1758	131.25	72.90
$x$ [m]	96	109	31	104	31	104		
$s \ t$ [m]	100	99	187	104	187	104		
$y_{MAX}^+$ [mm]	118.4769	183.3250	297.0678	177.2820	297.0678	183.3250	5.43	4.62
$x$ [m]	100	103	32	102	32	103		
$s \ t$ [m]	100	99	194	100	194	99		

**Quadro 4.26**

Deslocamentos máximos na viga para o sentido 2 e velocidade super-crítica de 275 m/s

	$s \leq 100$		$s \geq 100$		absoluto		amplificação	
	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2
$y_{MAX}^-$ [mm]	-50.8689	-98.7831	-217.2351	-113.6660	-217.2351	-113.6660	91.95	56.30
x [m]	100	138	56	103	56	103		
s t [m]	81	75	188	194	188	194		
$y_{MAX}^+$ [mm]	49.9080	100.6799	200.3407	116.0037	200.3407	116.0037	3.66	2.92
x [m]	79	155	61	105	61	105		
s t [m]	99	49	172	200	172	200		

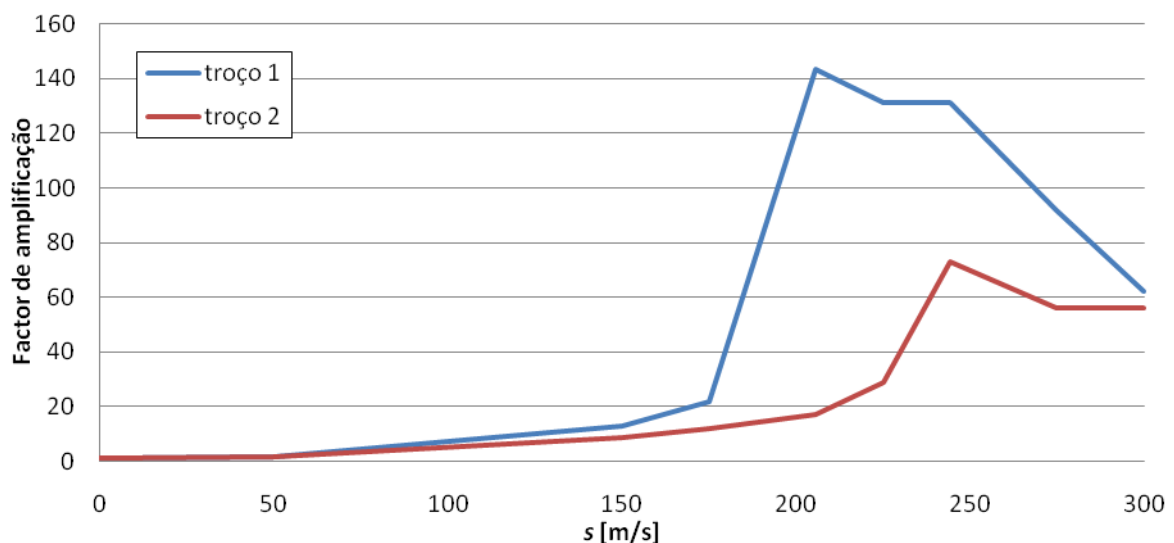
**Quadro 4.27**

Deslocamentos máximos na viga para o sentido 2 e velocidade super-crítica de 300 m/s

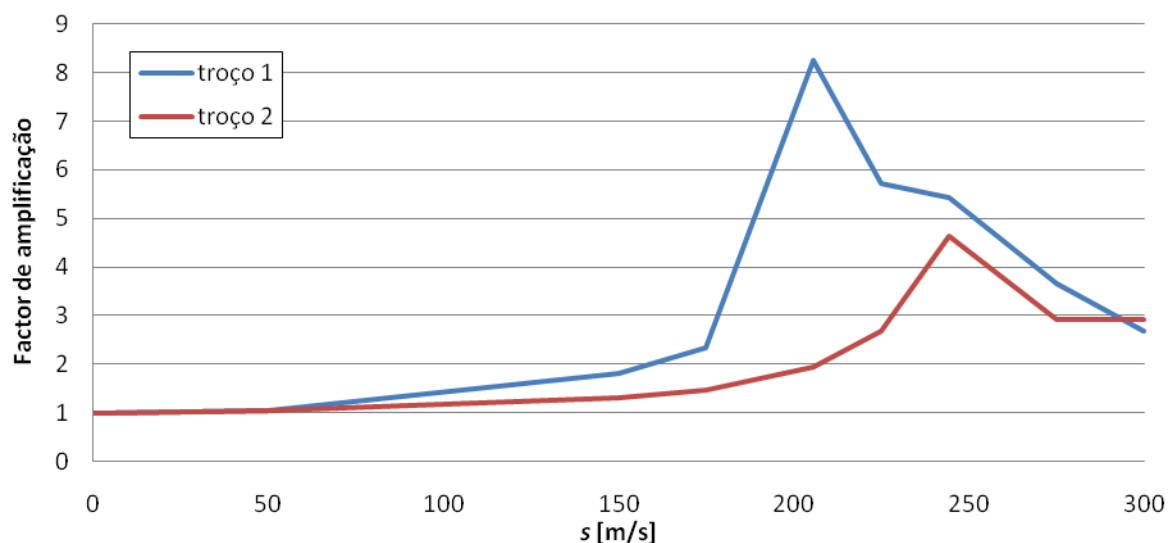
	$s \leq 100$		$s \geq 100$		absoluto		amplificação	
	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2
$y_{MAX}^-$ [mm]	-31.3013	-76.3835	-147.0797	-112.7736	-147.0797	-112.7736	62.26	55.86
x [m]	87	163	69	106	69	106		
s t [m]	82	51	179	186	179	186		
$y_{MAX}^+$ [mm]	30.1996	77.3046	146.1466	116.1278	146.1466	116.1278	2.67	2.93
x [m]	92	170	69	104	69	104		
s t [m]	81	35	167	196	167	196		

Verifica-se que os deslocamentos máximos ascendentes e descendentes no troço 1 ocorrem sempre após a passagem da carga pela descontinuidade. Tal como para o sentido 1, o maior deslocamento máximo neste troço ocorre para a velocidade de 205.574 m/s, mas no troço 2 ocorre para a velocidade de 244.470 m/s. Estes são os resultados que se esperaria obter inicialmente, pois estas velocidades são as críticas para os troços em questão.

Nas figuras 4.34 e 2.35 apresenta-se o factor de amplificação do deslocamento máximo ascedente e descendente em ambos os troços.

**Figura 4.34** • Factor de amplificação do deslocamento ascedente em ambos os troços para o sentido 2

#### 4. Viga descontínua sujeita a uma carga móvel

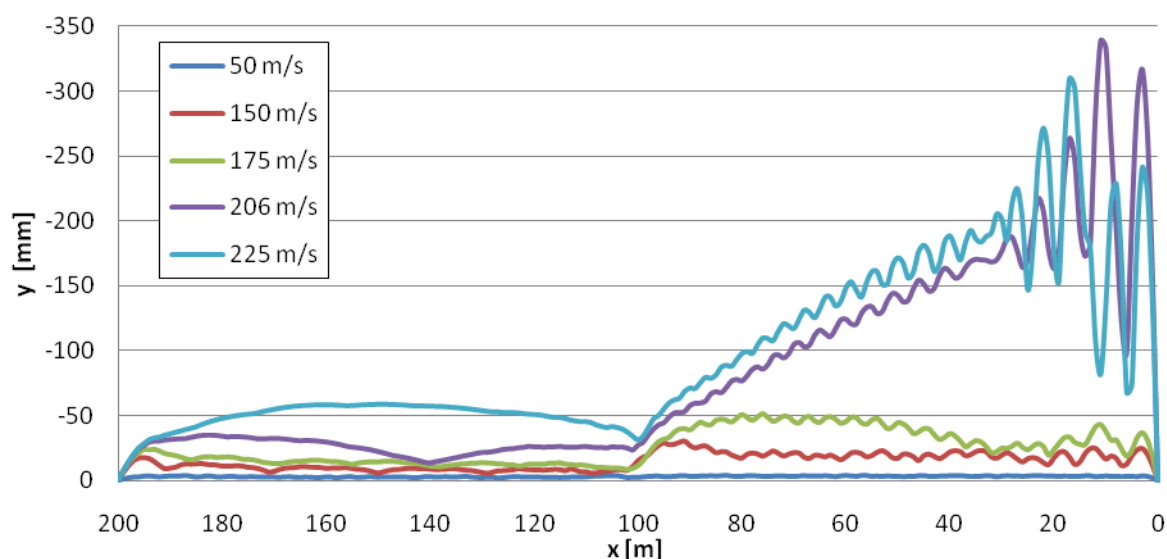


**Figura 4.35** • Factor de amplificação do deslocamento descendente em ambos os troços para o sentido 2

Como se pode ver, ao contrário do que sucede no caso inicialmente estudado, o factor de amplificação do troço 1 é superior ao do troço 2 para praticamente todas as velocidades. Isto leva a crer que o segundo troço pelo qual a carga passa é aquele que é mais prejudicado, pois a passagem da carga por ele ocorre ao mesmo tempo que a radiação de transição é mais intensa.

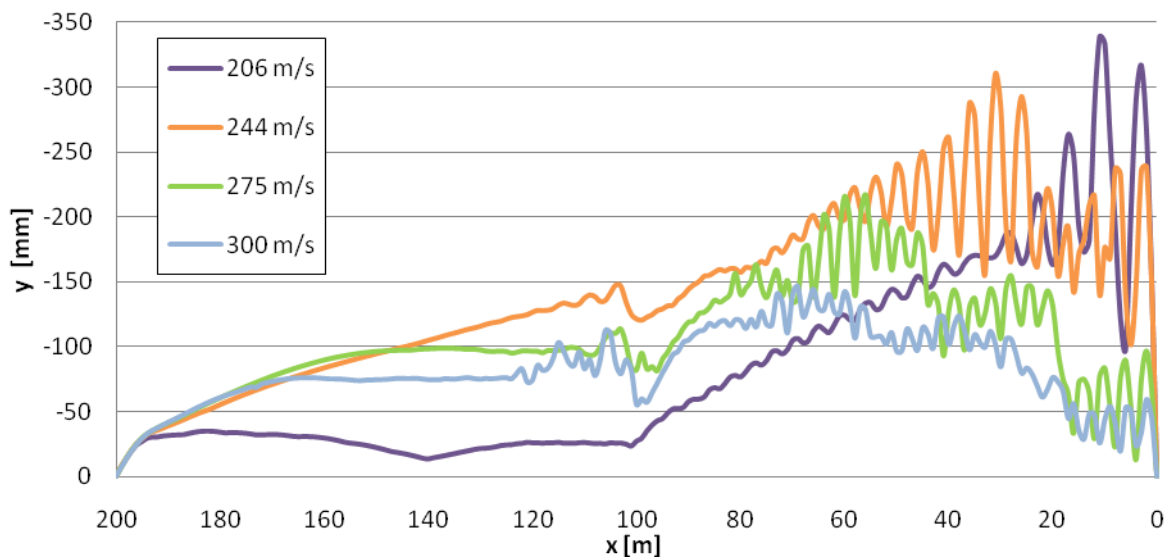
Neste caso, como o troço 1 apresenta uma fundação mais flexível, os deslocamentos máximos observados na viga descontínua são maiores que os observados quando a carga se movia segundo o sentido 1.

Nas figuras 4.36 a 4.39 é possível observar os deslocamentos máximos ascendentes e descendentes para cada ponto da viga. Estas ilustram claramente o facto de o troço 1 ser muito mais solicitado que o troço 2, ao contrário do que se verifica nas figuras 4.17 a 4.20, em que a diferença entre os dois troços não era tão pronunciada.

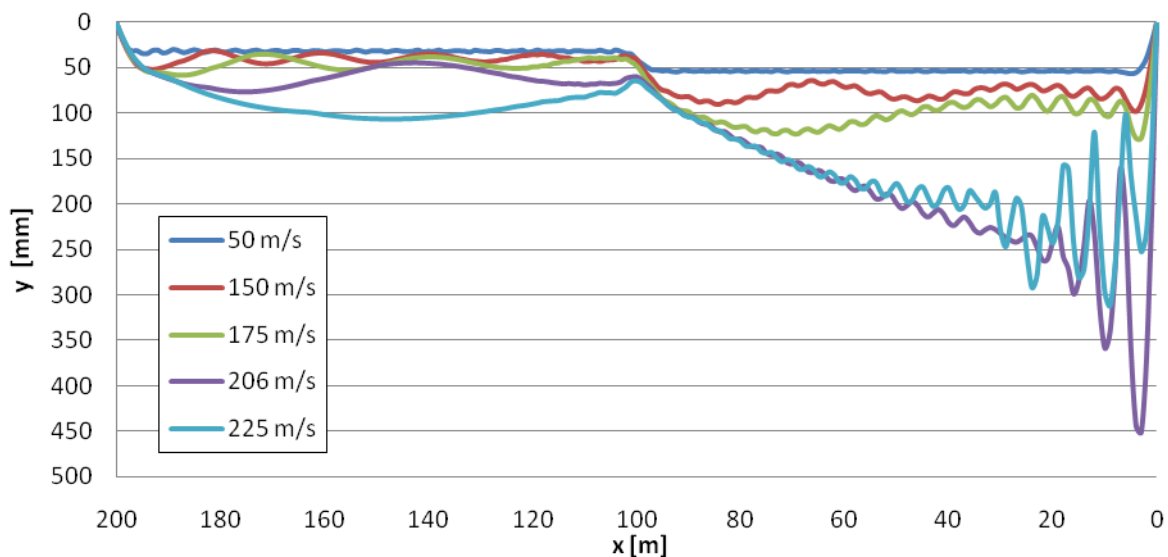


**Figura 4.36** • Deslocamento ascendente máximo em cada ponto da viga para o sentido 2 e os primeiros cinco valores de velocidade





**Figura 4.37** • Deslocamento ascendente máximo em cada ponto da viga para o sentido 2 e os últimos três valores de velocidade e a velocidade crítica do troço 1



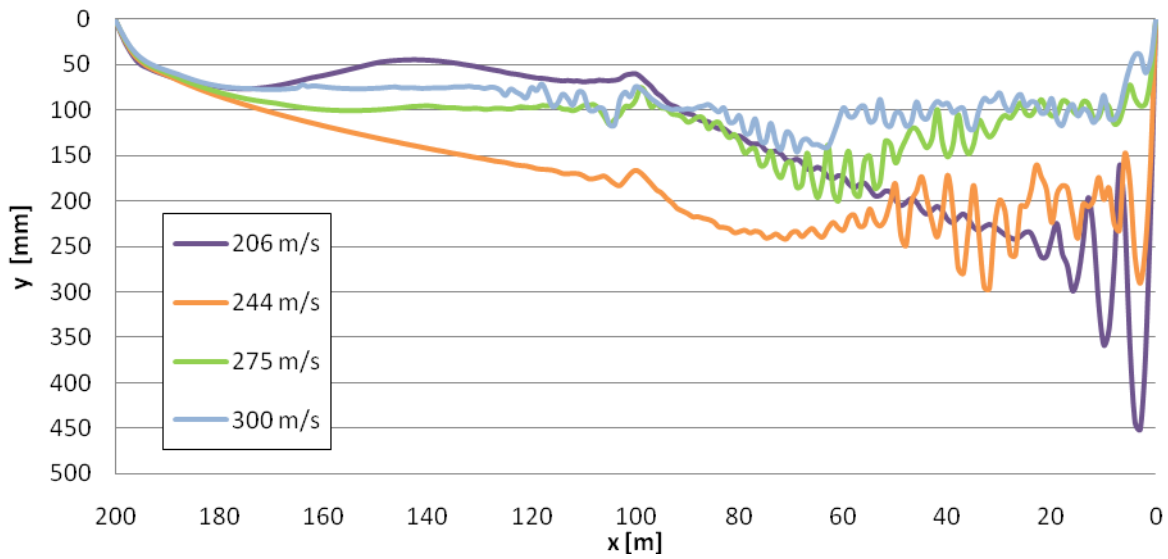
**Figura 4.38** • Deslocamento descendente máximo em cada ponto da viga para o sentido 2 e os primeiros cinco valores de velocidade

Para melhor compreender a diferença entre os dois casos, apresentam-se nas figuras 4.40 e 4.41 os factores de amplificação do deslocamento ascendente e descendente para o troço 1 para ambos os sentidos, e nas figuras 4.42 e 4.43 para o troço 2.

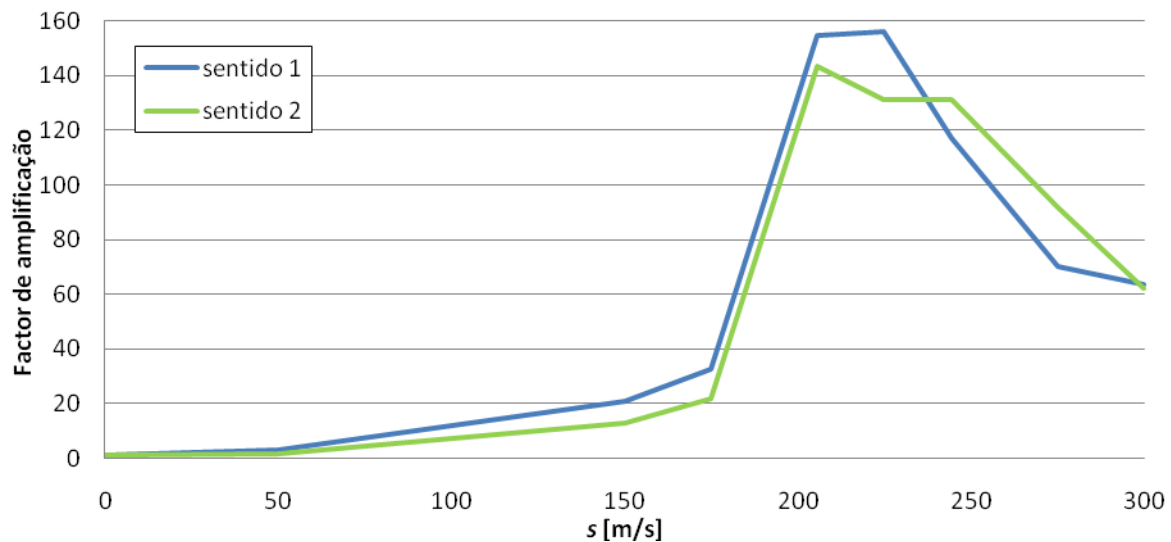
Como se pode ver, no caso do troço 1, o deslocamento ascendente apresenta maior factor de amplificação quando a carga se move segundo o sentido 1, embora os valores estejam relativamente próximos. Já para o deslocamento descendente, o sentido 2 apresenta um maior factor de amplificação para a maior parte dos casos, especialmente para a velocidade crítica (205.574 m/s).

Para o troço 2, para ambos os deslocamentos, o factor de amplificação é muito maior quando a carga se desloca segundo o sentido 1 do que segundo o sentido 2.

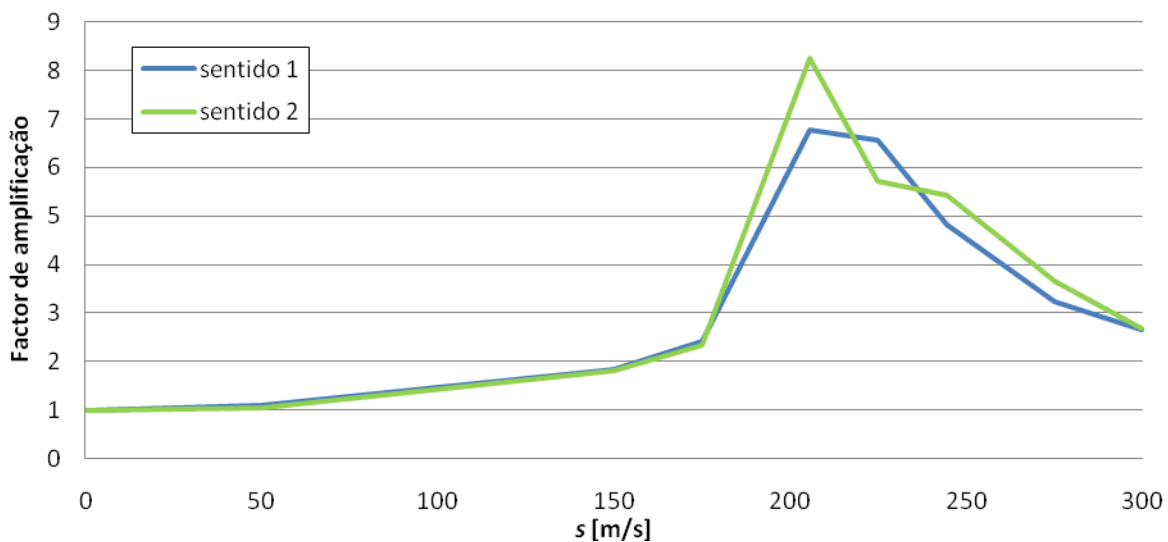
#### 4. Viga descontínua sujeita a uma carga móvel



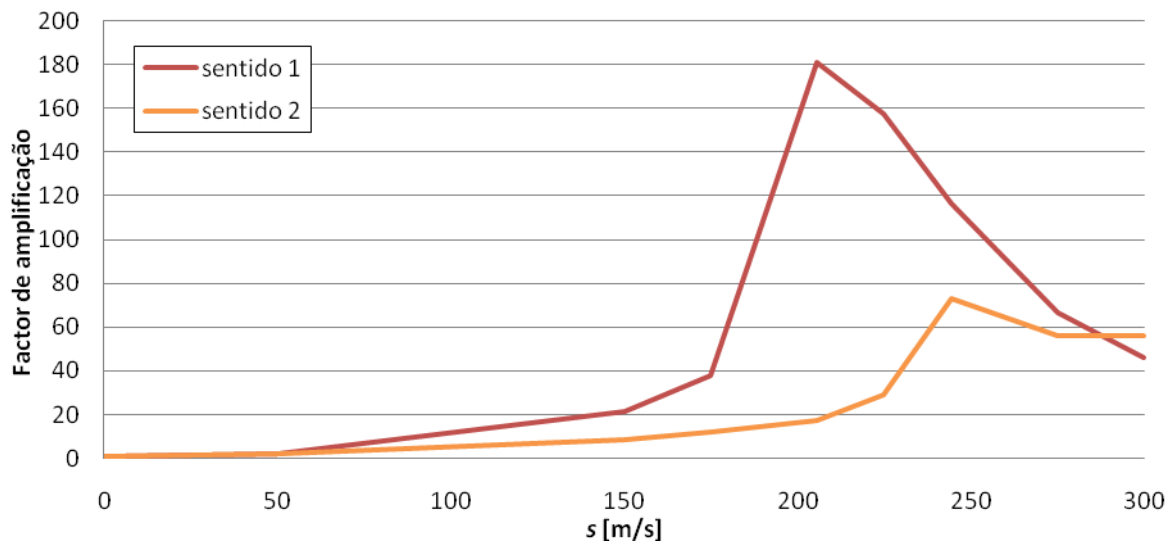
**Figura 4.39** • Deslocamento descendente máximo em cada ponto da viga descontínua para o sentido 2 e os últimos três valores de velocidade e a velocidade crítica do trecho 1



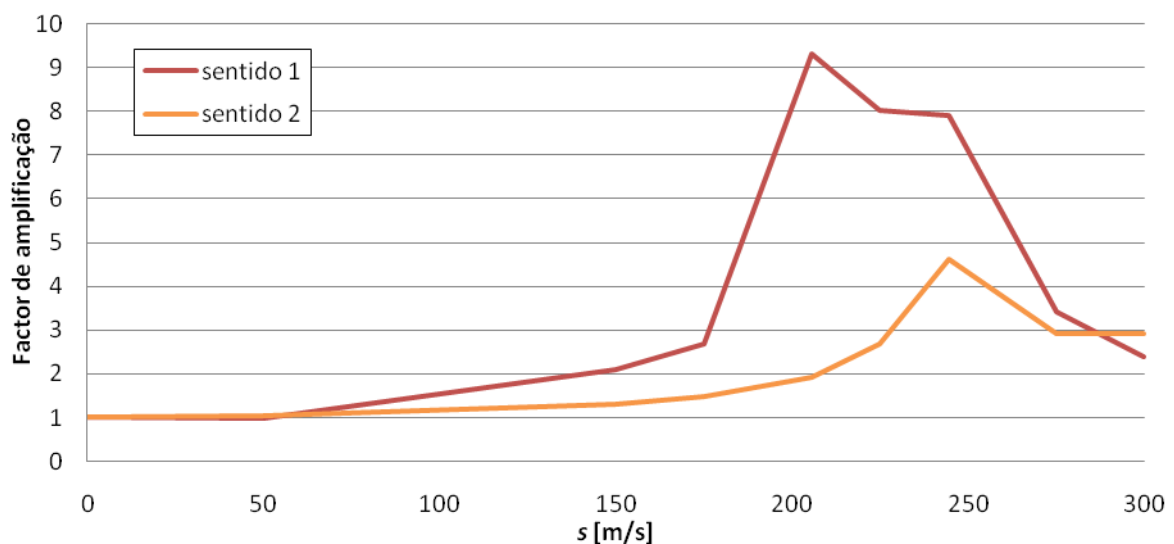
**Figura 4.40** • Factor de amplificação do deslocamento ascendente no trecho 1 para ambos os sentidos



**Figura 4.41** • Factor de amplificação do deslocamento descendente no trecho 1 para ambos os sentidos



**Figura 4.42** • Factor de amplificação do deslocamento ascendente no trecho 2 para ambos os sentidos



**Figura 4.43** • Factor de amplificação do deslocamento descendente no trecho 2 para ambos os sentidos

É também visível a diferença na velocidade associada ao factor de amplificação de pico que, como já foi referido, é de 205.574 para o sentido 1 e 244.470 para o sentido 2, que correspondem à velocidade crítica do trecho 1 e 2, respectivamente.

Passa-se de seguida a analisar a radiação de transição segundo o mesmo processo aplicado para o sentido 1.

Os quadros 4.28 a 4.35 mostram os valores dos deslocamentos máximos, definidos no espaço e no tempo, enquanto que as figuras 3.44 e 3.45 apresentam essa informação de forma gráfica.

Nas figuras 4.46 a 4.49 apresentam-se os valores máximos do deslocamento ascendente e descendente em cada ponto da viga descontínua.

#### 4. Viga descontínua sujeita a uma carga móvel

##### Quadro 4.28

Deslocamentos máximos devido à radiação de transição para o sentido 2 e velocidade sub-crítica de 50 m/s

	$s \leq 100$		$s \geq 100$		absoluto	
	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2
$y^-_{MAX}$ [mm]	-17.2634	-2.0059	-13.4104	-2.6321	-17.2634	-2.6321
x [m]	100	190	100	106	100	106
s t [m]	99	100	100	106	99	106
$y^+_{MAX}$ [mm]	3.9332	10.4169	4.3274	11.8102	4.3274	11.8102
x [m]	100	100	40	100	40	100
s t [m]	88	100	168	103	168	103

##### Quadro 4.29

Deslocamentos máximos devido à radiação de transição para o sentido 2 e velocidade sub-crítica de 150 m/s

	$s \leq 100$		$s \geq 100$		absoluto	
	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2
$y^-_{MAX}$ [mm]	-46.4834	-3.8168	-46.4834	-11.6203	-46.4834	-11.6203
x [m]	100	100	100	100	100	100
s t [m]	100	96	100	112	100	112
$y^+_{MAX}$ [mm]	15.9100	3.4175	34.8957	19.1312	34.8957	19.1312
x [m]	93	100	98	100	98	100
s t [m]	99	100	107	103	107	103

##### Quadro 4.30

Deslocamentos máximos devido à radiação de transição para o sentido 2 e velocidade sub-crítica de 175 m/s

	$s \leq 100$		$s \geq 100$		absoluto	
	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2
$y^-_{MAX}$ [mm]	-60.1177	-3.5627	-60.1177	-16.5613	-60.1177	-16.5613
x [m]	100	100	100	100	100	100
s t [m]	100	97	100	112	100	112
$y^+_{MAX}$ [mm]	27.4154	3.6524	47.9748	22.4427	47.9748	22.4427
x [m]	93	100	99	100	99	100
s t [m]	100	100	108	105	108	105

##### Quadro 4.31

Deslocamentos máximos devido à radiação de transição, sentido 2 e velocidade crítica do troço 1, 205.574 m/s

	$s \leq 100$		$s \geq 100$		absoluto	
	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2
$y^-_{MAX}$ [mm]	-139.0234	-6.1763	-246.8200	-20.6415	-246.8200	-20.6415
x [m]	89	100	100	100	100	100
s t [m]	100	98	102	115	102	115
$y^+_{MAX}$ [mm]	180.7905	2.4827	233.1795	26.1142	233.1795	26.1142
x [m]	100	100	10	100	10	100
s t [m]	95	92	185	106	185	106

**Quadro 4.32**

Deslocamentos máximos devido à radiação de transição para o sentido 2 e velocidade intermédia de 225 m/s

	$s \leq 100$		$s \geq 100$		absoluto	
	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2
$y_{MAX}^-$ [mm]	-145.1335	-9.6299	-217.1015	-21.4544	-217.1015	-21.4544
$x$ [m]	100	100	83	100	83	100
$s \ t$ [m]	92	98	197	116	197	116
$y_{MAX}^+$ [mm]	150.4981	5.1195	228.7655	26.9620	228.7655	26.9620
$x$ [m]	100	100	71	100	71	100
$s \ t$ [m]	98	93	200	107	200	107

**Quadro 4.33**

Deslocamentos máximos devido à radiação de transição, sentido 2 e velocidade crítica do troço 2, 244.470 m/s

	$s \leq 100$		$s \geq 100$		absoluto	
	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2
$y_{MAX}^-$ [mm]	-116.5403	-9.7745	-230.2788	-40.7694	-230.2788	-40.7694
$x$ [m]	100	100	93	100	93	100
$s \ t$ [m]	85	100	200	116	200	116
$y_{MAX}^+$ [mm]	114.9161	10.2170	190.4225	44.6096	190.4225	44.6096
$x$ [m]	100	100	95	100	95	100
$s \ t$ [m]	90	96	188	109	188	109

**Quadro 4.34**

Deslocamentos máximos devido à radiação de transição para o sentido 2 e velocidade super-crítica 275 m/s

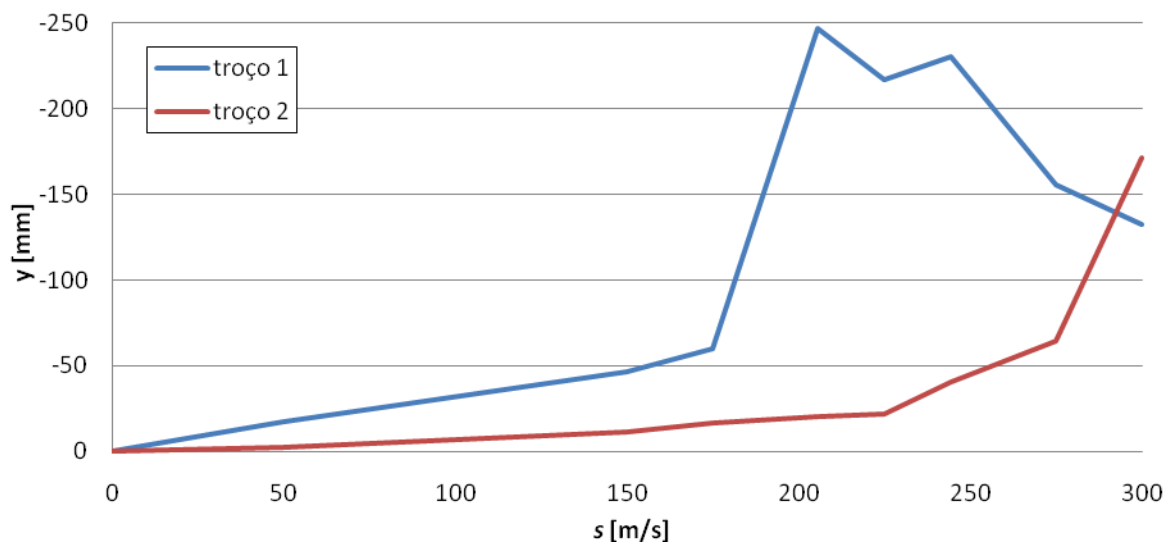
	$s \leq 100$		$s \geq 100$		absoluto	
	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2
$y_{MAX}^-$ [mm]	-58.8143	-2.1199	-155.2498	-64.6732	-155.2498	-64.6732
$x$ [m]	91	100	96	103	96	103
$s \ t$ [m]	81	86	185	193	185	193
$y_{MAX}^+$ [mm]	60.2501	1.9917	156.4458	65.9714	156.4458	65.9714
$x$ [m]	100	100	100	104	100	104
$s \ t$ [m]	76	82	170	199	170	199

**Quadro 4.35**

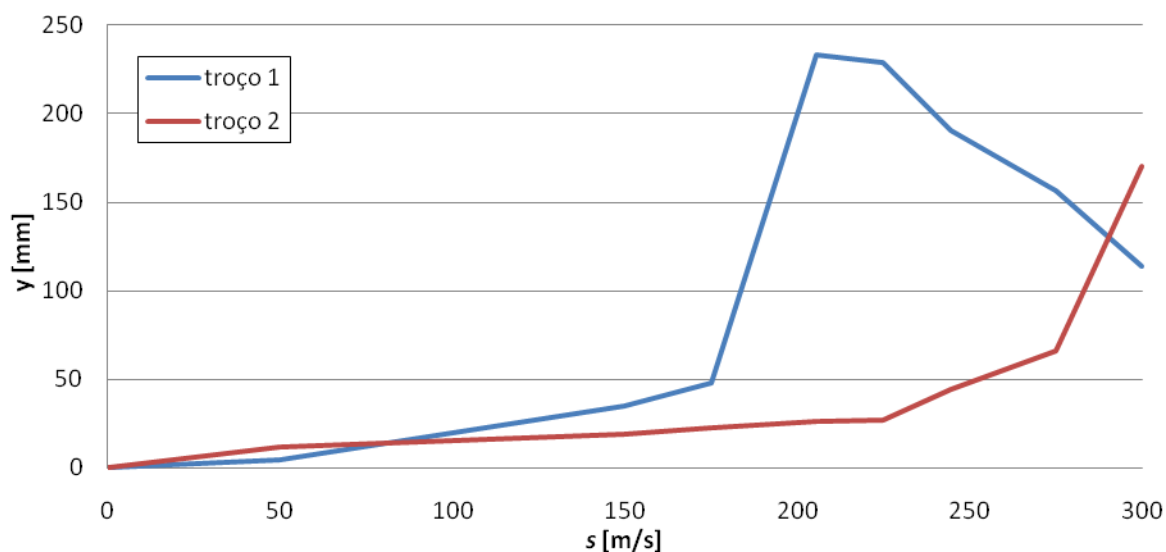
Deslocamentos máximos devido à radiação de transição para o sentido 2 e velocidade super-crítica 300 m/s

	$s \leq 100$		$s \geq 100$		absoluto	
	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2
$y_{MAX}^-$ [mm]	-33.7295	-131.1423	-132.5022	-171.1085	-132.5022	-171.1085
$x$ [m]	92	136	99	104	99	104
$s \ t$ [m]	76	100	193	185	193	185
$y_{MAX}^+$ [mm]	33.8173	125.6427	113.8938	170.0398	113.8938	170.0398
$x$ [m]	100	144	99	106	99	106
$s \ t$ [m]	71	100	182	175	182	175

#### 4. Viga descontínua sujeita a uma carga móvel



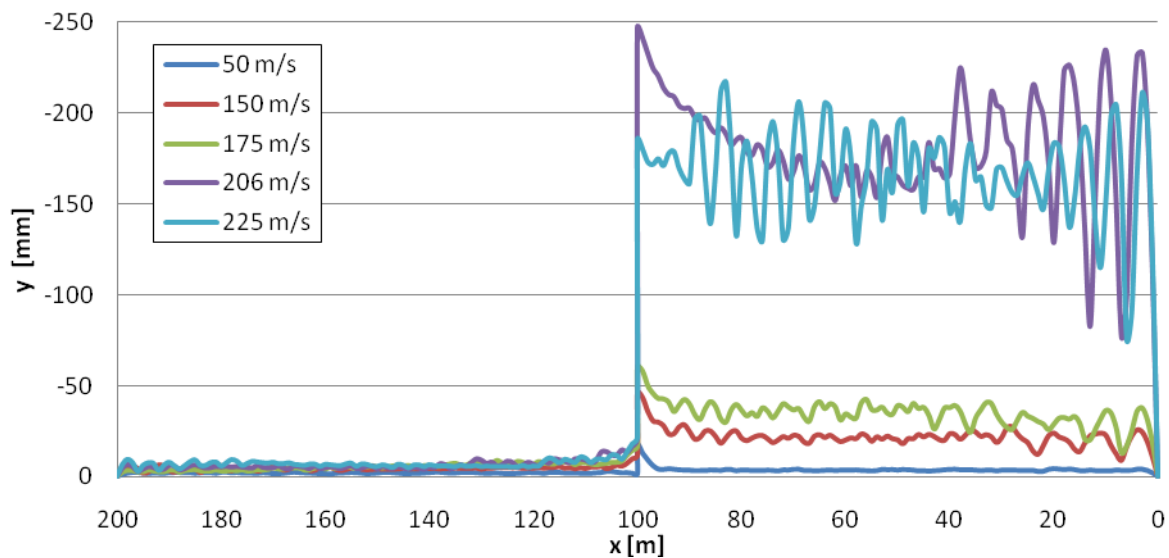
**Figura 4.44** • Deslocamento máximo ascendente devido à radiação de transição para o sentido 2 em ambos os troços



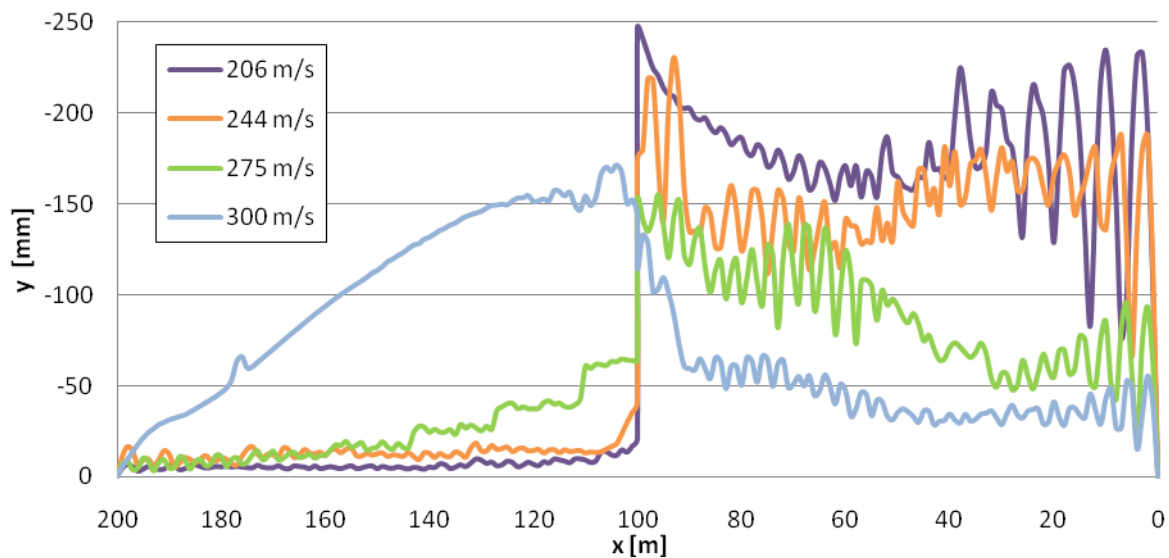
**Figura 4.45** • Deslocamento máximo descendente devido à radiação de transição para o sentido 2 em ambos os troços

Como se pode ver, os maiores valores máximos ocorrem quase sempre após a passagem da carga, ou pouco antes de esta se dar. Também é possível ver que, tal como o troço 2 foi o mais afectado pela radiação de transição para o sentido 1, quando a carga se desloca segundo o sentido 2, o troço 1 é o que apresenta maiores deslocamentos devido a este fenómeno.

Isto aliado à menor rigidez de vibração do troço 1 causa a grande disparidade de deslocamentos que é possível observar nas figuras 4.46 a 4.49. Note-se que os maiores deslocamentos no troço 1 ocorrem para a velocidade de 204.574 m/s, como seria de esperar, mas para o troço 2 ocorre para a velocidade de 300 m/s, para a qual os deslocamentos deste troço superam os do troço 1.



**Figura 4.46** • Deslocamento ascendente máximo devido em cada ponto da viga descontínua devido à radiação de transição para o sentido 2 e os primeiros cinco valores de velocidade



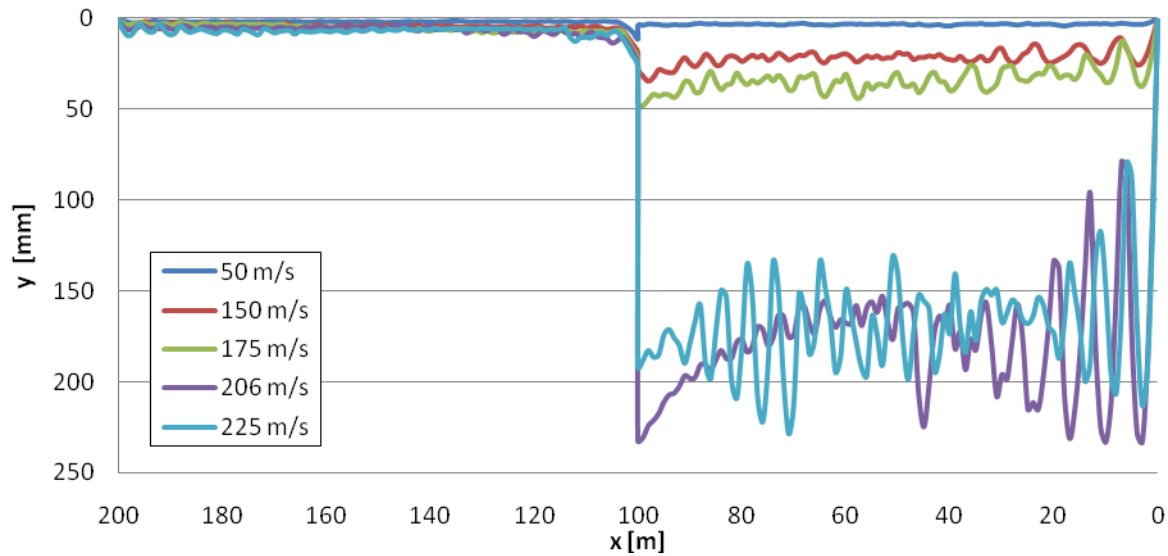
**Figura 4.47** • Deslocamento ascendente máximo devido em cada ponto da viga descontínua devido à radiação de transição para o sentido 2 e últimos três valores de velocidade e a velocidade crítica do trecho 1

Resta então analisar a diferença entre os deslocamentos máximos com e sem radiação. Apresenta-se nos quadros 4.36 e 4.37 a comparação entre os deslocamentos máximos obtidos para as vigas contínuas e os obtidos para a viga descontínua, e nas figuras 4.50 e 4.51 a diferença entre os dois casos.

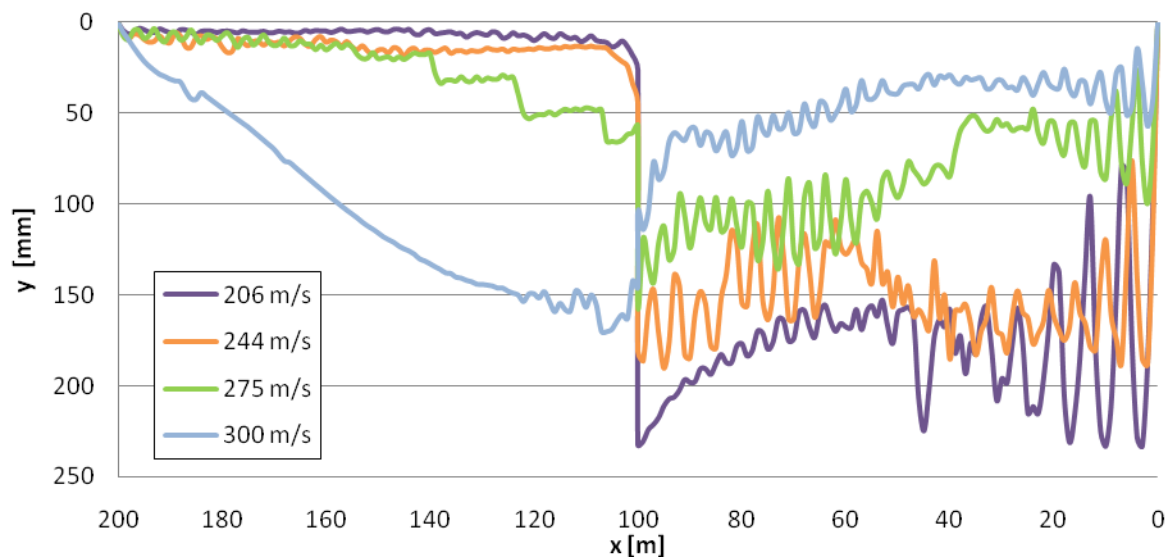
Verifica-se que a diferença no deslocamento do trecho 1 devido à radiação de transição começa por aumentar até atingir um valor máximo do deslocamento ascendente e descendente para a velocidade crítica do trecho 1 e 2, respectivamente. Após estas velocidades, a diferença baixa, mas continua a ser apreciável.

Para o trecho 2, atinge-se a maior diferença para a velocidade intermédia de 225 m/s, mas os efeitos da radiação de transição são pouco significativos neste caso.

#### 4. Viga descontínua sujeita a uma carga móvel



**Figura 4.48** • Deslocamento descendente máximo devido em cada ponto da viga descontínua devido à transição de radiação para o sentido 2 e os primeiros cinco valores de velocidade



**Figura 4.49** • Deslocamento descendente máximo devido em cada ponto da viga descontínua devido à transição de radiação para o sentido 2 e últimos três valores de velocidade

#### Quadro 4.36

Varição dos deslocamentos ascendentes máximos devido à radiação de transição para o sentido 2

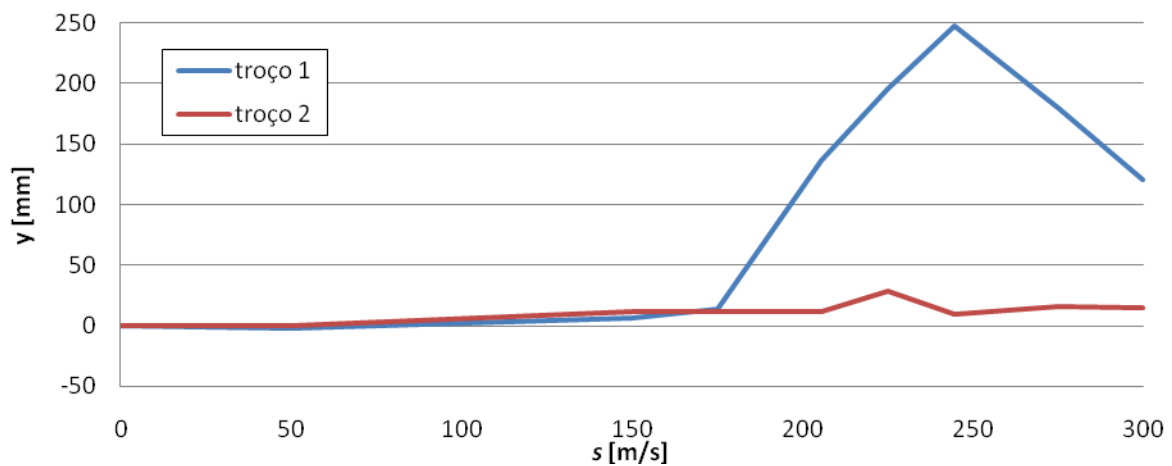
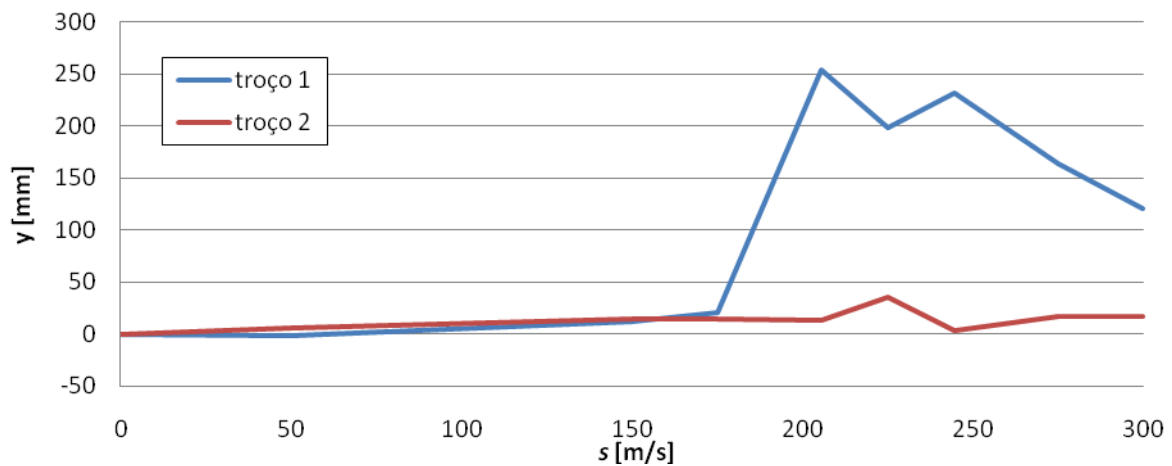
viga	contínua		descontínua		$ y_C - y_D $ [mm]	
	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2
50	-5.77	-3.62	-3.74	-3.62	-2.03	0.00
150	-24.08	-5.95	-30.45	-17.61	6.37	11.66
175	-37.50	-11.94	-51.15	-23.81	13.65	11.87
205.574	-201.98	-23.50	-338.48	-34.86	136.50	11.36
225	-114.30	-29.57	-309.71	-58.67	195.41	29.10
244.470	-62.97	-137.59	-310.08	-147.18	247.11	9.59
275	-37.07	-97.90	-217.24	-113.67	180.17	15.77
300	-26.44	-97.90	-147.08	-112.77	120.64	14.88



**Quadro 4.37**

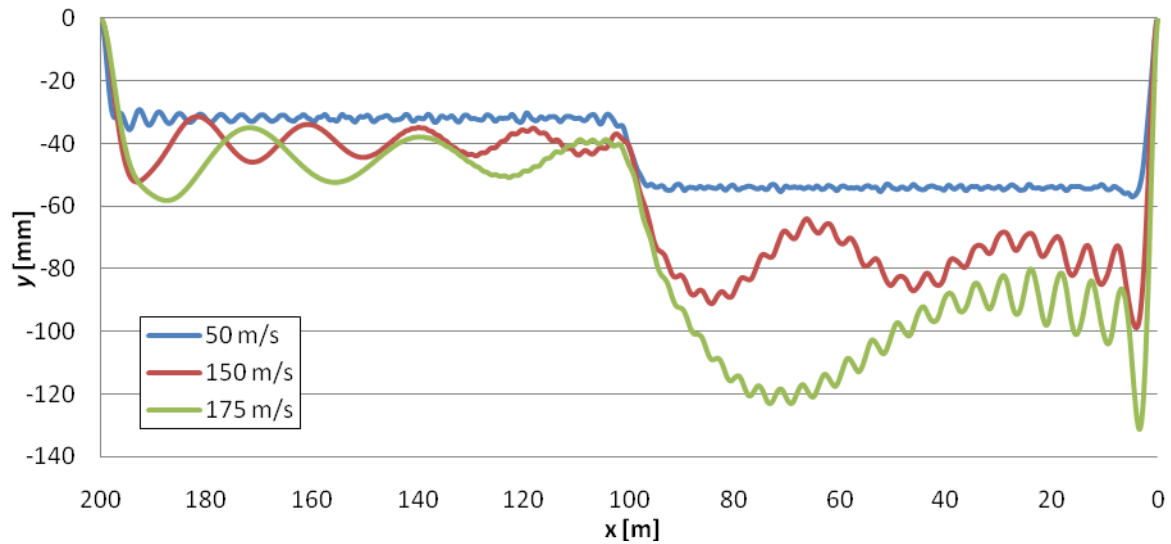
Variação dos deslocamentos descendentes máximos devido à radiação de transição para o sentido 2

viga	contínua		descontínua		$ y_c  -  y_d $ [mm]	
s [m/s]	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2
50	58.98	34.61	56.90	40.99	-2.08	6.38
150	87.24	37.34	98.84	52.26	11.60	14.91
175	106.87	43.10	127.63	58.19	20.76	15.09
205.574	197.61	63.49	451.46	76.46	253.85	12.97
225	113.84	70.53	312.09	106.41	198.26	35.88
244.470	64.93	179.58	297.07	183.33	232.14	3.75
275	37.14	99.04	200.34	116.00	163.21	16.97
300	26.04	99.04	146.15	116.13	120.11	17.09

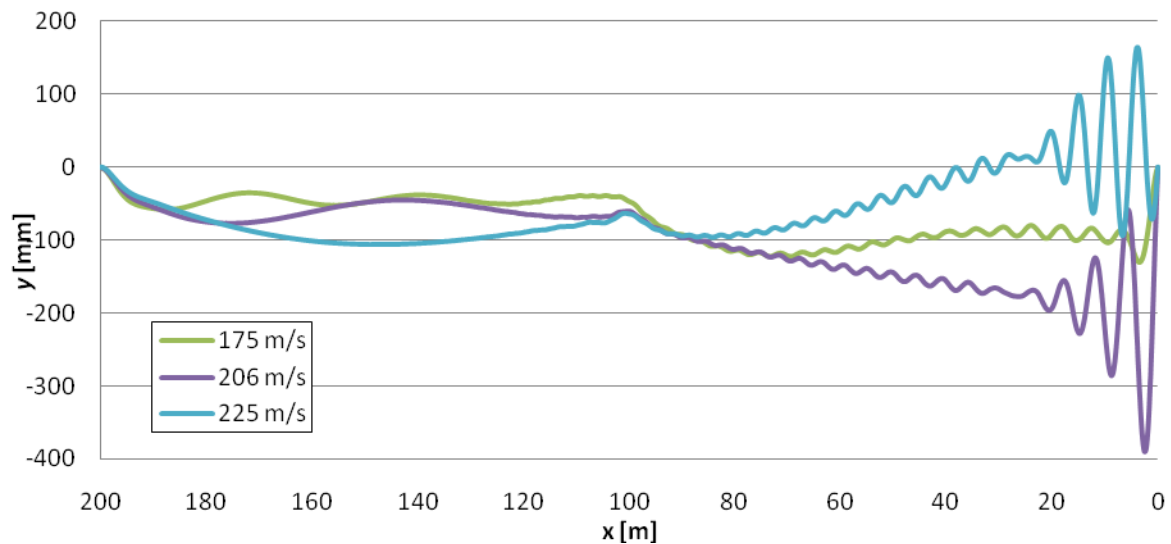
**Figura 4.50** • Variação dos deslocamentos ascendentes máximos na viga descontínua devido à radiação de transição para o sentido 2**Figura 4.51** • Variação dos deslocamentos descendentes máximos na viga descontínua devido à radiação de transição para o sentido 2

Mais uma vez, apresenta-se o deslocamento vertical no ponto de aplicação da carga ao longo do tempo nas figuras 4.52 a 4.54. Como se pode ver, a principal diferença é que a oscilação ocorre no troço 1, após a passagem pelo ponto de descontinuidade. Também se verifica que as maiores oscilações ocorrem para velocidade de 205.574 m/s, a velocidade crítica do troço 1.

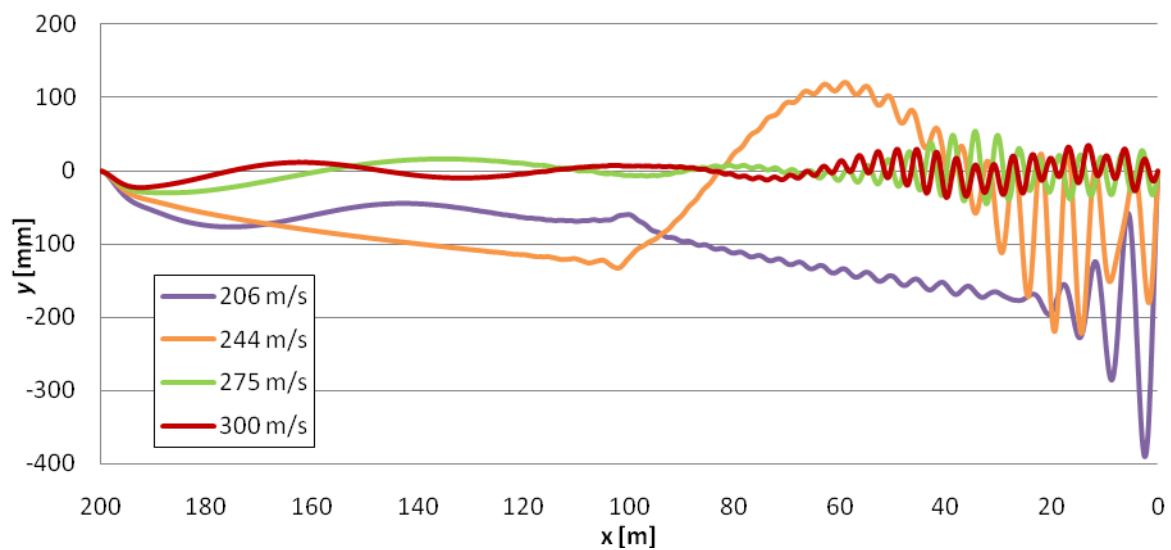
#### 4. Viga descontínua sujeita a uma carga móvel



**Figura 4.52** • Deslocamento vertical no ponto de aplicação da carga para as velocidades de 50, 150 e 175 m/s



**Figura 4.53** • Deslocamento vertical no ponto de aplicação da carga para velocidades de 175, 205.574 e 225 m/s



**Figura 4.54** • Deslocamento vertical no ponto de aplicação da carga para 205.574, 244.740, 275 e 300 m/s

### 4.3 – Solução amortecida

Considere-se novamente a solução (4.26), mas desta vez sem desprezar o amortecimento.

De acordo com Frýba [6], no caso das cargas móveis, os efeitos do amortecimento podem ser modelados através da hipótese de Voigt, segundo a qual o amortecimento é proporcional à velocidade da vibração. Segundo o referido autor, este modelo tem uma boa concordância com os resultados experimentais conhecidos.

Assim, define-se o amortecimento através da frequência circular de amortecimento,  $\omega_{bi}$ , ou seja

$$c(x) = c = 2m\omega_{bi}. \quad (4.42)$$

Em que  $\omega_{bi}$  é proporcional à frequência natural de vibração, isto é

$$\omega_{bi} = \xi\omega_i. \quad (4.43)$$

Designa-se  $\xi$  como percentagem de amortecimento crítico, pois quando  $\xi = 100\%$  (ou 1),

$$c(x) = c = 2m\omega_{bi}. \quad (4.44)$$

Isto é, o amortecimento é igual ao amortecimento crítico da estrutura.

Substituindo (4.43) em (4.42) e este por sua vez nas definições (4.21) e (4.22), vem

$$a(x) = a = \xi\omega_i, \quad (4.45)$$

$$b_i(x) = b_i = \omega_i \sqrt{(1 - \xi^2)}. \quad (4.46)$$

Voltando à solução (4.26), tem-se então

$$f_i(t) = \frac{P}{\omega_i \sqrt{(1 - \xi^2)}} \int_{\tau=0}^t v_i(s\tau) e^{-\xi\omega_i(t-\tau)} \sin\left(\omega_i \sqrt{(1 - \xi^2)}(t - \tau)\right) d\tau. \quad (4.47)$$

Uma vez que o resultado desta integração é consideravelmente extenso e difícil de simplificar, apresentam-se apenas os resultados.

Considera-se que o amortecimento é de 5% ( $\xi = 0.05$ ), tomado geralmente como um valor representativo do amortecimento inerente aos materiais de construção (neste caso o aço dos carris).

#### 4. Viga descontínua sujeita a uma carga móvel

Estudaram-se cinco valores de velocidade: a velocidade sub-crítica de 50 m/s, a velocidade crítica do troço 1, 205.574 m/s, a velocidade intermédia de 225 m/s, a velocidade crítica do troço 2, 244.470 m/s e a velocidade super-crítica de 300 m/s. A carga aplicada mantém-se a mesma. Os quadros 4.38 a 4.42 resumem os valores obtidos para os deslocamentos máximos no troço 1 e troço 2 quando a carga se desloca da esquerda para a direita (sentido 1).

**Quadro 4.38**

Deslocamentos máximos na viga com amortecimento para a velocidade sub-crítica de 50 m/s

	$s \leq 100$		$s \geq 100$		absoluto		amplificação	
	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2
$y_{MAX}^-$ [mm]	-5.6062	-2.2827	-2.4862	-2.0104	-5.6062	-2.2827	2.37	1.13
$x$ [m]	13	106	97	108	13	106		
$s \ t$ [m]	3	98	106	100	3	98		
$y_{MAX}^+$ [mm]	57.8760	40.8959	40.8959	40.8959	57.8760	40.8959	1.06	1.03
$x$ [m]	4	100	100	100	4	100		
$s \ t$ [m]	4	100	100	100	4	100		

**Quadro 4.39**

Deslocamentos máximos na viga com amortecimento para a velocidade crítica do troço 1, 205.574 m/s

	$s \leq 100$		$s \geq 100$		absoluto		amplificação	
	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2
$y_{MAX}^-$ [mm]	-102.3761	-102.3761	-155.4576	-151.6751	-155.4576	-151.6751	65.80	75.13
$x$ [m]	100	100	99	100	99	100		
$s \ t$ [m]	95	95	109	109	109	109		
$y_{MAX}^+$ [mm]	175.0059	136.0302	184.8776	183.5238	184.8776	183.5238	3.38	4.63
$x$ [m]	98	100	99	100	99	100		
$s \ t$ [m]	100	100	101	102	101	102		

**Quadro 4.40**

Deslocamentos máximos na viga com amortecimento para a velocidade intermédia de 225 m/s

	$s \leq 100$		$s \geq 100$		absoluto		amplificação	
	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2
$y_{MAX}^-$ [mm]	-102.7298	-75.3102	-134.0316	-125.9906	-134.0316	-125.9906	56.74	62.41
$x$ [m]	86	101	99	100	99	100		
$s \ t$ [m]	100	98	112	112	112	112		
$y_{MAX}^+$ [mm]	135.8817	58.1004	136.5361	133.4155	136.5361	133.4155	2.50	3.36
$x$ [m]	61	101	99	100	99	100		
$s \ t$ [m]	65	93	103	104	103	104		

Verifica-se que os deslocamentos máximos são muito inferiores aos verificados quando se desprezou o amortecimento. Embora os dados sejam insuficientes para criar uma representação gráfica do factor de amplificação em função da velocidade, é possível comparar os valores obtidos com amortecimento com as curvas sem amortecimento, como se pode ver nas figuras 4.55 e 4.56.

Quadro 4.41

Deslocamentos máximos na viga com amortecimento para a velocidade crítica do troço 2, 244.470 m/s

	$s \leq 100$		$s \geq 100$		absoluto		amplificação	
	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2
$y_{MAX}^-$ [mm]	-88.9044	-40.9788	-100.7369	-92.2583	-100.7369	-92.2583	42.64	45.70
$x$ [m]	50	102	98	100	98	100		
$s \ t$ [m]	66	99	113	114	113	114		
$y_{MAX}^+$ [mm]	113.0152	32.5155	103.0553	153.2584	113.0152	153.2584	2.07	3.86
$x$ [m]	37	101	98	197	98	197		
$s \ t$ [m]	42	94	103	199	103	199		

Quadro 4.42

Deslocamentos máximos na viga com amortecimento para a velocidade super-crítica de 300 m/s

	$s \leq 100$		$s \geq 100$		absoluto		amplificação	
	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2	troço 1	troço 2
$y_{MAX}^-$ [mm]	-94.4755	-27.9465	-149.7975	-93.0274	-149.7975	-93.0274	63.41	46.08
$x$ [m]	28	101	94	175	94	175		
$s \ t$ [m]	49	99	199	190	199	190		
$y_{MAX}^+$ [mm]	94.8591	26.9557	145.0581	94.3362	145.0581	94.3362	2.65	2.38
$x$ [m]	21	124	95	182	95	182		
$s \ t$ [m]	28	83	186	187	186	187		

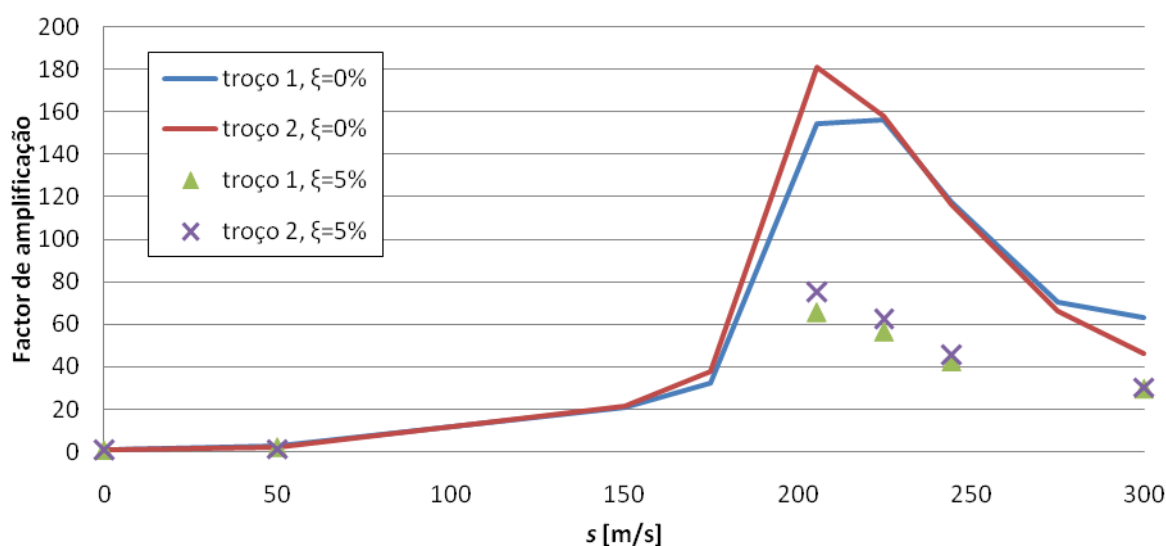
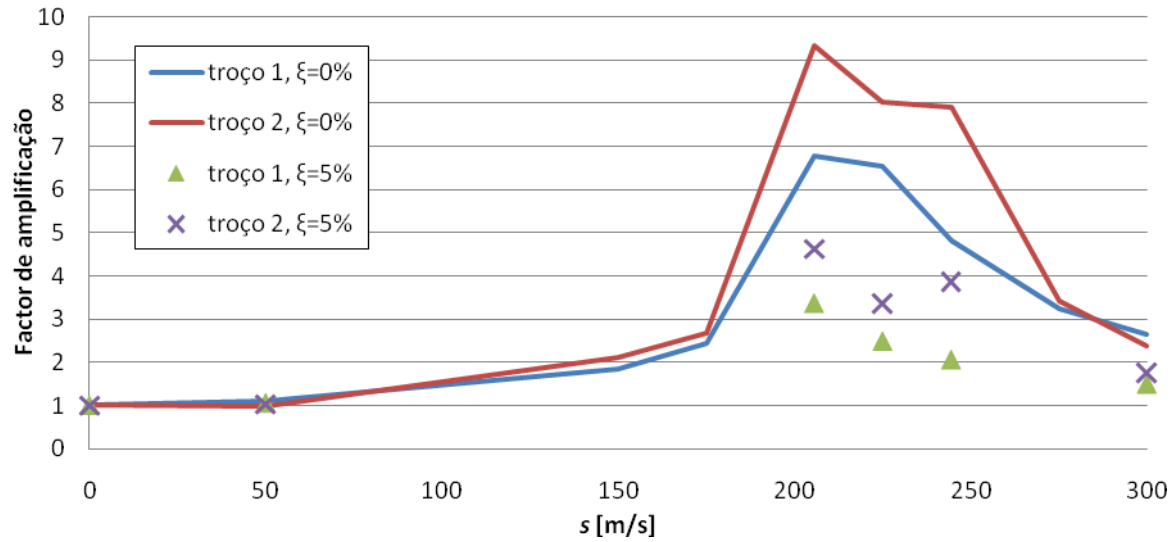


Figura 4.55 • Comparação do factor de amplificação do deslocamento ascendente com e sem amortecimento

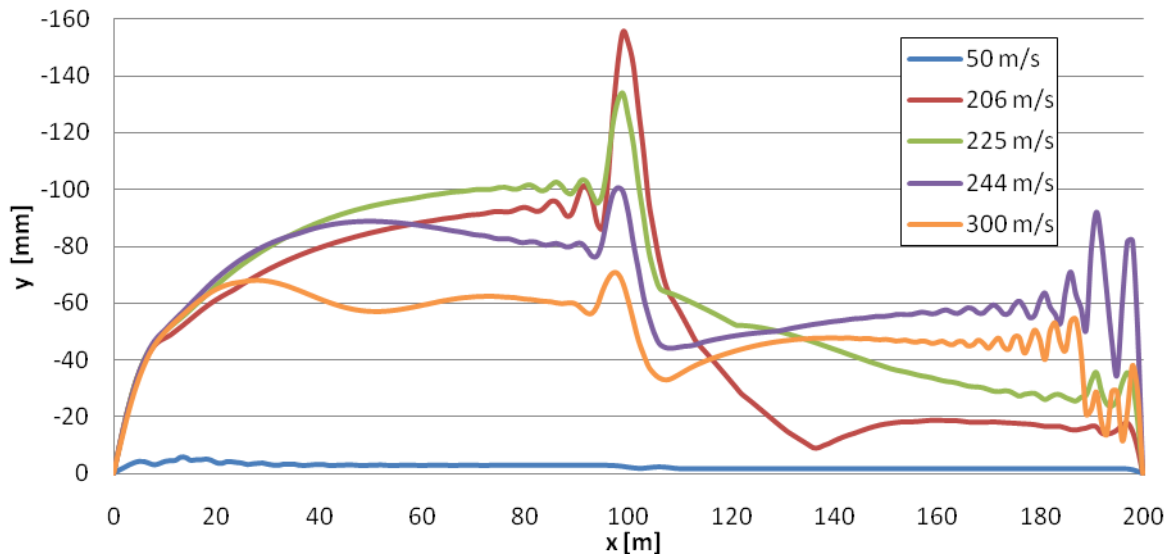
Como se pode ver, os deslocamentos máximos são muito inferiores aos obtidos quando não se considerava o amortecimento, embora ocorram sensivelmente para as mesmas velocidades. Este tem então um papel considerável no comportamento da estrutura.

As figuras 4.57 e 4.58 representam os deslocamentos máximos para cada ponto da viga para as várias velocidades consideradas, como tem sido habitual ao longo do capítulo.

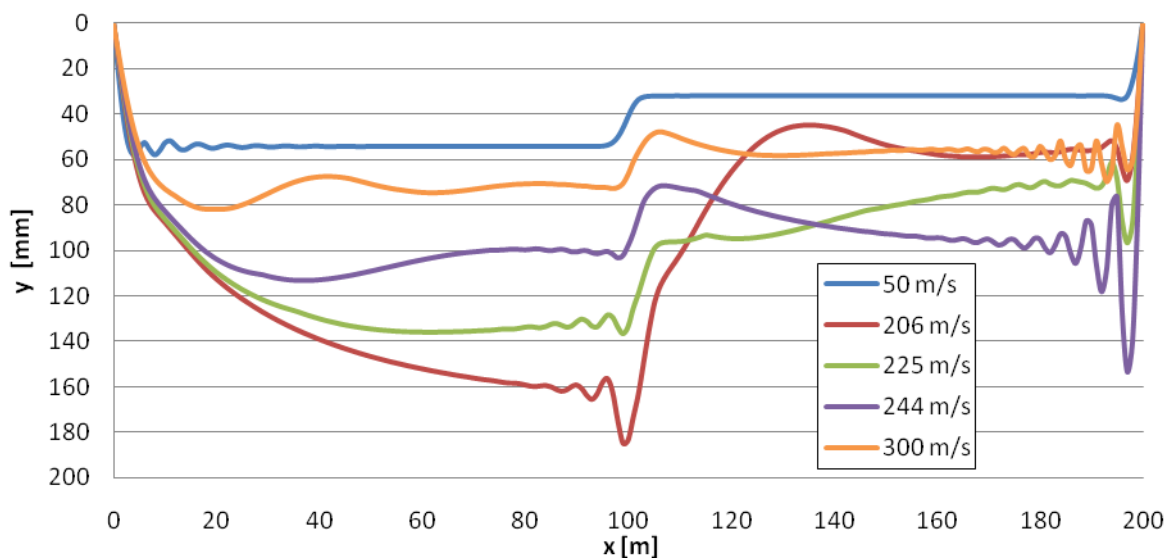
#### 4. Viga descontínua sujeita a uma carga móvel



**Figura 4.56** • Comparação do factor de amplificação do deslocamento descendente com e sem amortecimento

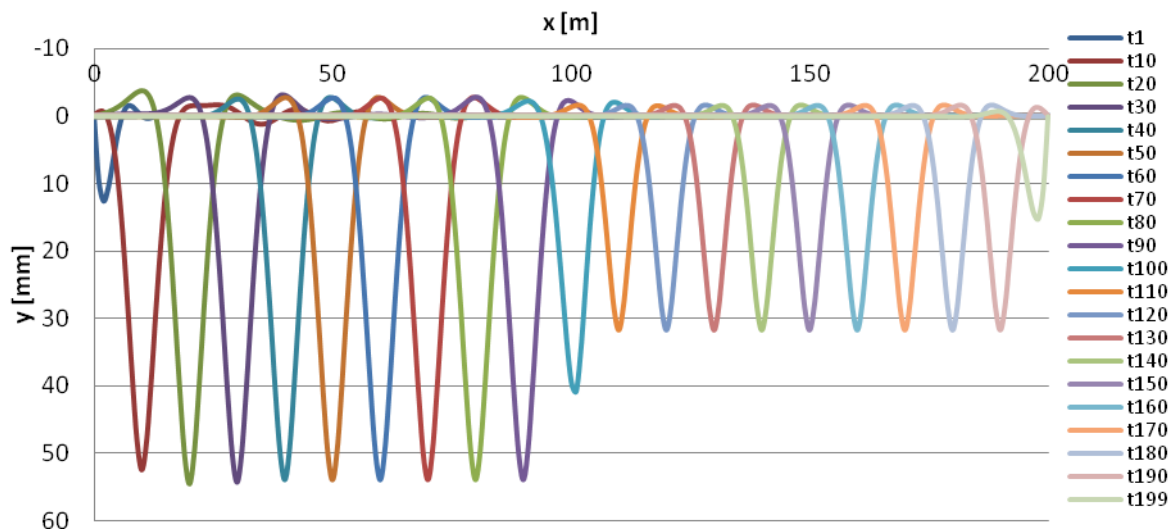


**Figura 4.57** • Deslocamento ascendente máximo em cada ponto da viga com amortecimento



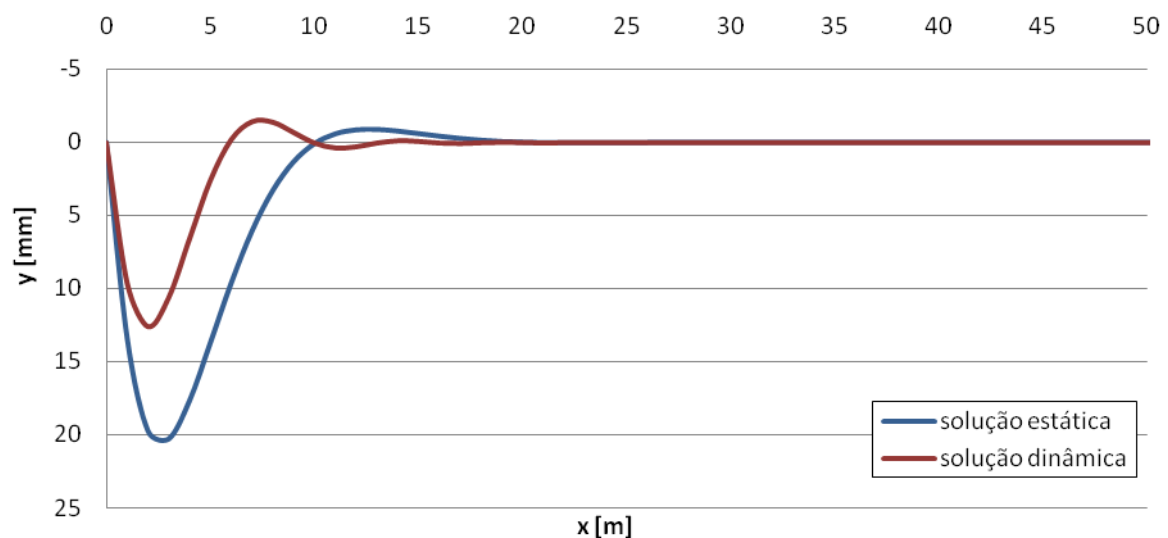
**Figura 4.58** • Deslocamento descendente máximo em cada ponto da viga com amortecimento

Ao contrário do que ocorre no caso sem amortecimento, não se verifica uma oscilação tão grande de valores, o que sugere que a solução se aproxima mais do caso estático. Isto é particularmente notório para a velocidade sub-crítica de 50 m/s. Na figura 4.59 apresenta-se a deformada devido à passagem da carga móvel a esta velocidade para alguns instantes de tempo, de forma análoga ao que foi feito na figura 4.13 para a solução estática.



**Figura 4.59** • Deslocamento na viga com amortecimento ao longo do tempo para a velocidade de 50 m/s

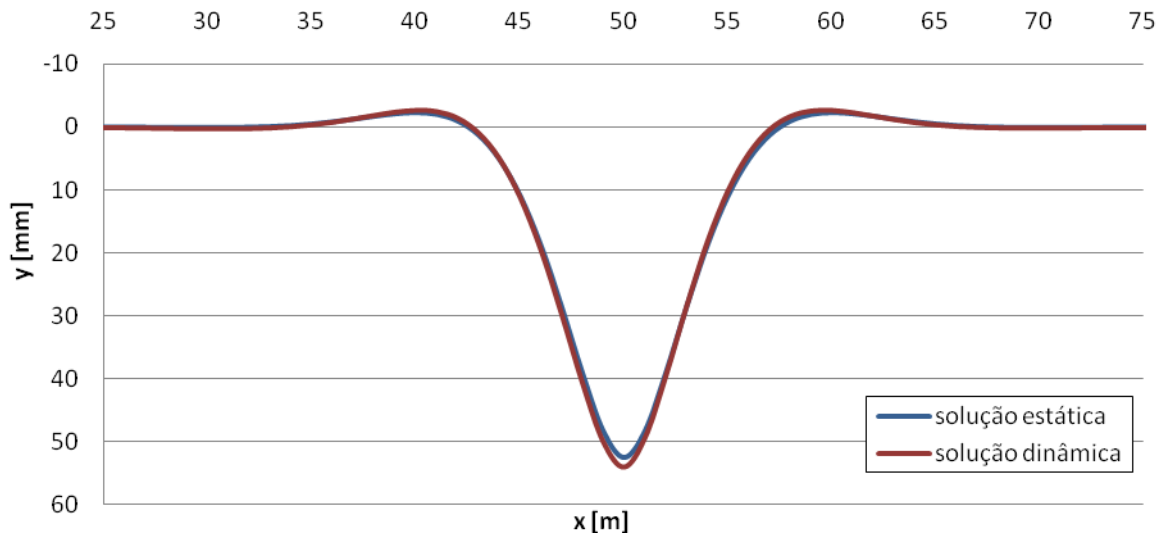
Como se pode ver, as deformadas são muito semelhantes às apresentadas na figura 4.13. As figuras 4.60 a 4.64 apresentam a comparação entre o caso estático e o caso dinâmico (mantendo a velocidade de 50 m/s) para alguns dos instantes de tempo.



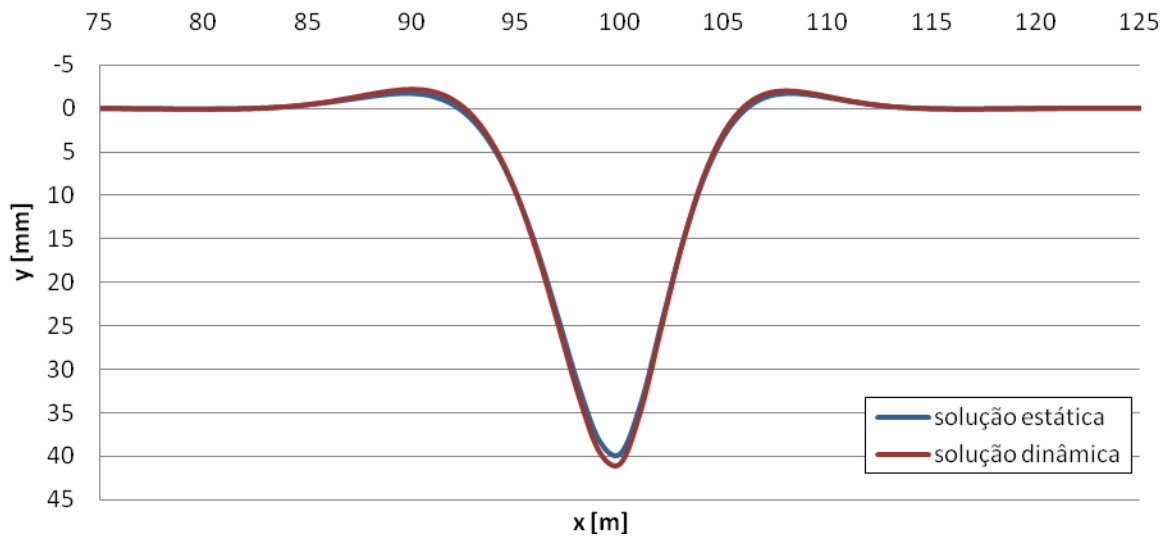
**Figura 4.60** • Deslocamento na viga com amortecimento para a velocidade de 50 m/s no instante  $t_s = 1$  m

Verifica-se que, exceptuando para a zona junto aos apoios esquerdo, as deformadas são muito semelhantes para ambos os casos, sendo o aumento devido à vibração quase negligenciável.

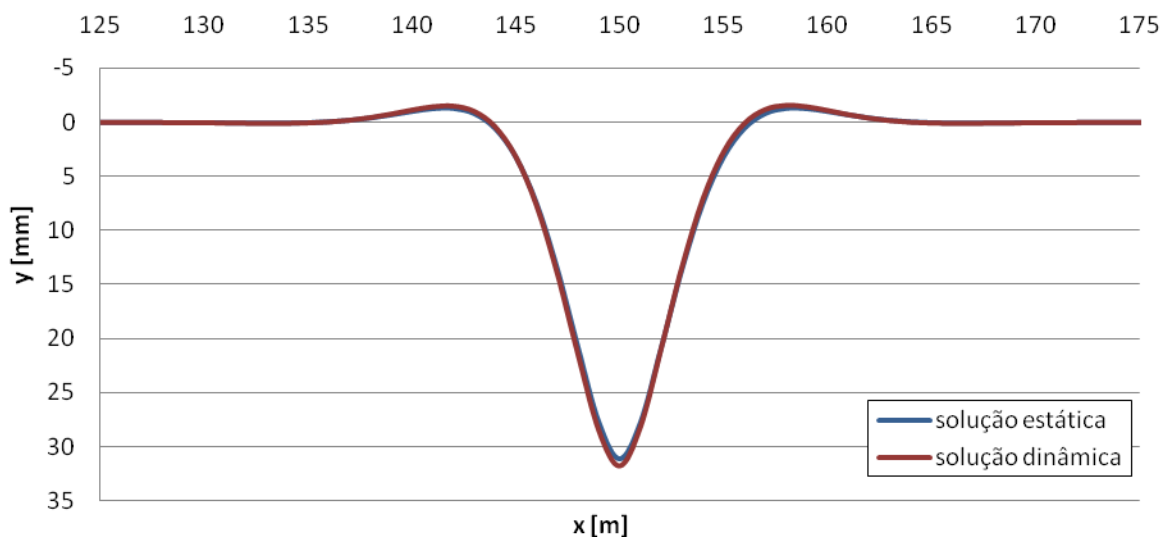
#### 4. Viga descontínua sujeita a uma carga móvel



**Figura 4.61** • Deslocamento na viga com amortecimento para a velocidade de 50 m/s no instante  $ts = 50$  m

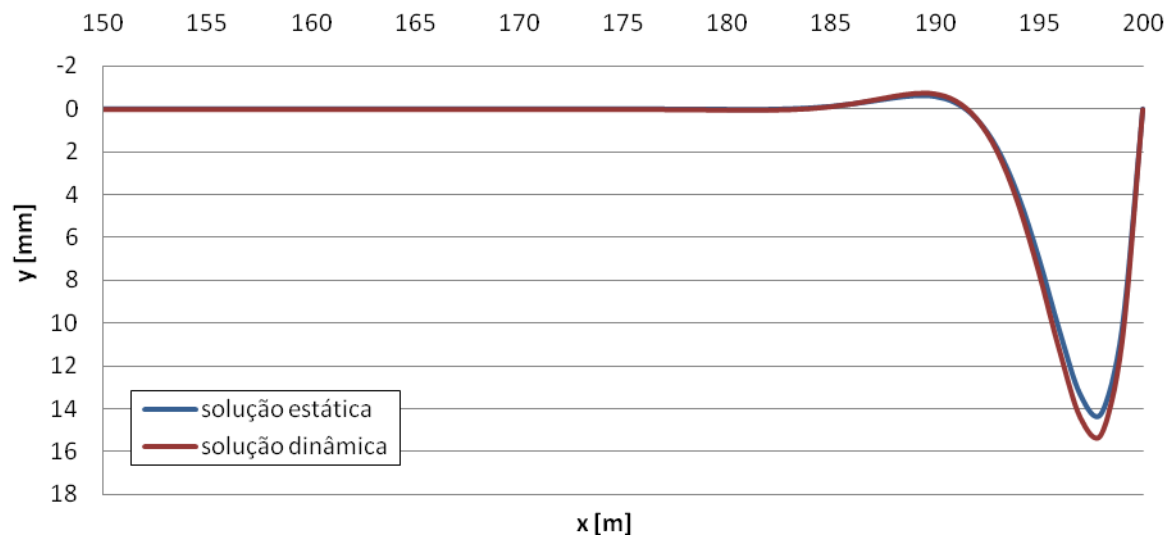


**Figura 4.62** • Deslocamento na viga com amortecimento para a velocidade de 50 m/s no instante  $ts = 100$  m



**Figura 4.63** • Deslocamento na viga com amortecimento para a velocidade de 50 m/s no instante  $ts = 150$  m



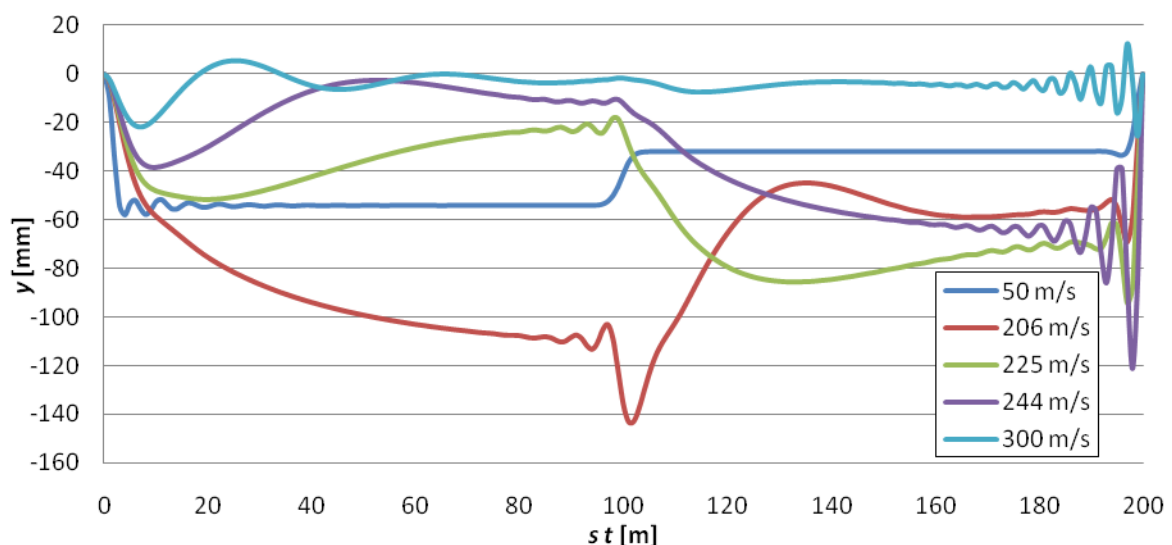


**Figura 4.64** • Deslocamento na viga com amortecimento para a velocidade de 50 m/s no instante  $t_s = 199$  m

A diferença observada para o instante inicial deve-se à presença do amortecimento: como a viga estava em repouso no instante inicial, assim que a carga entra dá-se uma mudança muito rápida de ausência total de deslocamentos para o deslocamento descendente provocado pela carga. Sendo o amortecimento proporcional à velocidade, o seu efeito faz-se sentir mais intensamente. Como o caso estático é equivalente a colocar a carga num ponto fixo e dar tempo à estrutura para se deformar, não ocorre este fenómeno.

Esta grande semelhança entre o caso estático e dinâmico para a velocidade sub-crítica vem reforçar a ideia de que o fenómeno de radiação por transição apenas se tornou significativo recentemente, pois para velocidades relativamente baixas (recorde-se que 50 m/s corresponde a 180 km/h), a componente dinâmica do deslocamento é tão baixa que não se produzem ondas de transição na zona de descontinuidade.

Por fim, apresenta-se o deslocamento no ponto de aplicação da carga na figura 4.65.



**Figura 4.65** • Deslocamento vertical no ponto de aplicação da carga considerando o amortecimento para as velocidades de 50, 205.574, 225, 244.470 e 300 m/s

#### 4. Viga descontínua sujeita a uma carga móvel

---

Como se pode ver, os deslocamentos sofridos no ponto de aplicação da carga são muito inferiores com o amortecimento do que sem ele, e mesmo a oscilação é menos acentuada, como seria de esperar. Contudo, a forma geral apresenta bastantes semelhanças, e o pico que se pode ver no ponto  $s \ t = 100$  indica que o efeito da radiação de transição continua presente, e a oscilação junto ao apoio da direita continua a estar presente, o que significa que a reflexão de ondas nos apoios também continua a ter um efeito considerável, embora estes fenómenos sejam atenuados pelo amortecimento.

## 5 – Conclusões

O estudo apresentado permite concluir que o fenómeno da radiação de transição na presença de mudanças bruscas a nível da rigidez vertical da fundação tem um peso considerável no comportamento dinâmico do sistema solo-carril.

Este fenómeno é especialmente notório para as velocidades críticas, uma vez que se juntam aos deslocamentos já de si aumentados pela ressonância as ondas geradas no ponto de descontinuidade. Como se viu, o efeito é especialmente sentido no troço após este ponto, e os resultados apontam para um aumento muito maior dos deslocamentos quando a transição se dá de uma fundação fraca para uma forte.

Como os gráficos do deslocamento no ponto de aplicação da carga mostraram, não só a viga é afectada por este fenómeno, como existe a possibilidade de o veículo sofrer deslocamentos verticais de amplitude considerável. É razoável colocar a hipótese que em casos em que a via ferroviária assente sobre solos de muito má qualidade e se dá uma transição a alta velocidade deste meio de baixa rigidez para um muito mais rígido (como uma laje de betão), não só os passageiros irão sentir um nível de desconforto pouco tolerável, como a própria estabilidade do veículo ferroviário será posta em causa.

Contudo, os veículos ferroviários não só apresentam massa considerável como têm o seu próprio comportamento dinâmico em resposta à vibração da via, pois são sistemas dotados de alguma flexibilidade e amortecimento. Assim, dada a simplicidade da análise realizada, não é possível obter conclusões definitivas sobre os efeitos da radiação de transição na segurança dos veículos e no conforto dos passageiros.

Os efeitos da radiação de transição só começaram a ganhar relevância recentemente, pois para as velocidades praticadas pelos veículos ferroviários durante grande parte da sua existência, este fenómeno é praticamente inexistente. Apenas na década de 60 do passado século se ultrapassou a velocidade de 200 km/h, considerado então como a barreira entre os transportes ferroviários convencionais e os de alta velocidade. Actualmente os comboios de alta velocidade convencionais atingem velocidades de 350 km/h em viagens rotineiras, e 574 km/h em condições de teste, o que se pode aproximar muito da velocidade crítica de solos de fraca qualidade.

Esta dissertação é apenas uma iniciação ao estudo do problema das vibrações em vigas finitas, pelo que existe ainda amplo espaço para desenvolvimentos, como por exemplo uma análise mais detalhada dos efeitos do amortecimento, estudo de outras condições de apoio e qual a sua influência nas vibrações e na radiação de transição. O próximo passo seria a consideração da massa, rigidez e amortecimento do veículo na análise dinâmica, bem como uma modelação mais complexa da via, um projecto mais ambicioso mas também com aplicações práticas de maior interesse.



## Bibliografia

- [1] Andersen L, Nielsen SRK. Vibrations of a track caused by variations of the foundation stiffness. *Probabilist Eng Mech*; 2003.
- [2] Chen YH, Huang YH. Dynamic stiffness of infinite Timoshenko beam on viscoelastic foundation in moving co-ordinate, *International journal for numerical methods in engineering*; 2000.
- [3] Correia A, Araújo N, Martins J, Cunha J. Interaction soil-railway track for high speed trains, *Escola de Engenharia, Universidade do Minho*; 2006.
- [4] Cottrell J, Hughes T, Reali A, Sangalli G. Isogeometric discretizations in structural dynamics and wave propagation, *ECCOMAS thematic conference on computational methods in structural dynamics and earthquake engineering*; 2007.
- [5] Dimitrovová Z, Varandas JN. Critical velocity of a load moving on a beam with a sudden change of foundation stiffness: Applications to high-speed trains, *Comput Struct*; 2009.
- [6] Frýba L. Vibration of solids and structures under moving loads (3.<sup>a</sup> ed.), Praga, República Checa: Thomas Telford; 1999.
- [7] Kaynia AM, Madhus C, Zackrisson P. Ground vibration from high-speed trains: prediction and countermeasure, *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*; 2000.
- [8] Lundqvist A, Dahlberg T. Railway track stiffness variations – consequences and countermeasures. In: *Proceedings of the 19th IAVSD symposium on dynamics of vehicles on roads and on tracks*, Milão, Itália; 2005.
- [9] Matos C, Santos JC. *Curso de Análise Complexa*, Lisboa: Dinterna; 2000.
- [10] Meirovitch L. *Elements of vibration analysis* (2.<sup>a</sup> ed.), Virginia, EUA: McGraw-Hill; 1986.
- [11] Metrikine AV, Wolfert ARM, Dieterman HA. Transition radiation in an elastically supported string. Abrupt and smooth variations of the support stiffness. *Wave Motion*; 1998.
- [12] Ribeiro AC, Calçada R, Delgado R. Track–train dynamic behaviour on transition zones of high speed railway lines. In: Topping BHV, editor. *Proceedings of the 11th international conference on civil, structural and environmental engineering computing*. St. Julians, Malta: Civil-Comp Press; 2007.
- [13] Spiegel MR. *Transformadas de Laplace*, São Paulo, Brasil: McGraw-Hill; 1971.
- [14] Van Dalen KN. Ground vibration induced by a high-speed train running over inhomogeneous subsoil, transition radiation in two-dimensional inhomogeneous elastic systems. Master thesis, Department of Structural Engineering, TUDelft; 2006.
- [15] Van Dalen KN, Metrikine AV. Transition radiation of elastic waves at the interface of two elastic half-planes. *Journal of Sound and Vibration*; 2008.
- [16] Verichev SN, Metrikine AV. Instability of vibrations of a mass that moves uniformly along a beam on a periodically inhomogeneous foundation. *J Sound Vib*; 2003.